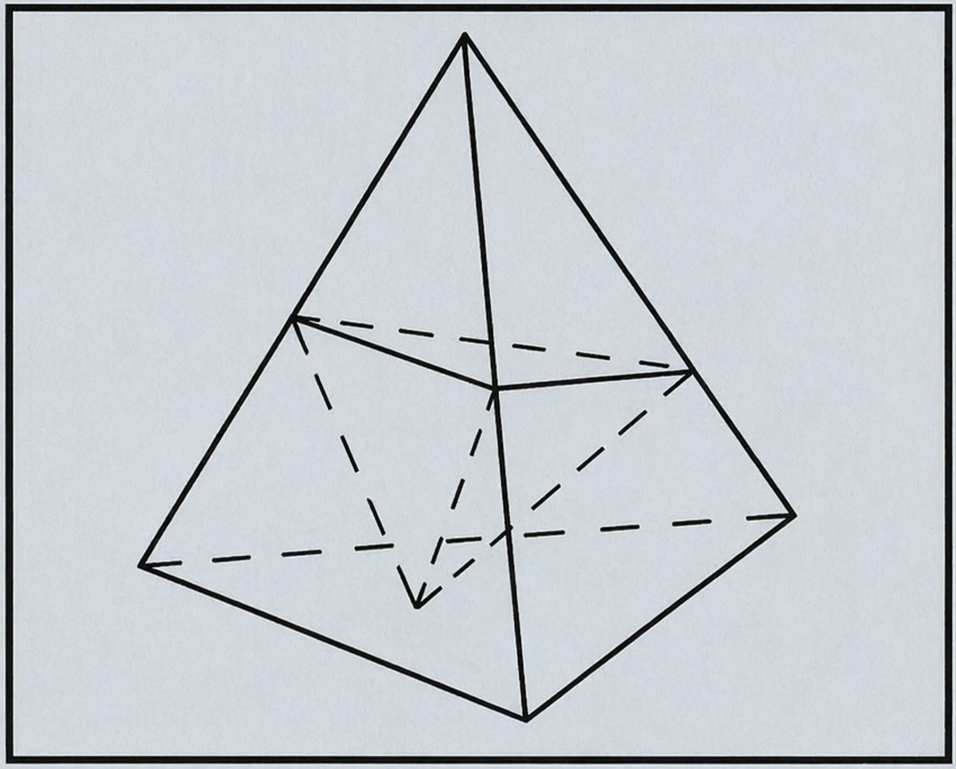
Б.И. АЛЕКСАНДРОВ И.И. МЕЛЬНИКОВ В.Ф. ПАХОМОВ

ЗАДАЧИ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ



Б. И. АЛЕКСАНДРОВ, И. И. МЕЛЬНИКОВ,
В. Ф. ПАХОМОВ

ЗАДАЧИ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1982

УДК 512

Александров Б. И. и др. Задачи и методические указания по математике / Б. И. Александров, И. И. Мельников, В. Ф. Пахомов.—М.: Изд-во МГУ, 1982.—288 с.

Книга содержит задачи из вариантов вступительных экзаменов по математике на различные факультеты Московского университета, предлагавшиеся в 1980 г. Для одного варианта каждого факультета приведен подробный разбор, к остальным вариантам даны ответы. Кроме этого в книге содержится более тысячи задач из материалов вступительных экзаменов в различные университеты и институты. Специальное отражение нашли темы «Производная и касательная», «Интеграл», «Векторы» и др.

Для лиц, готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения.

Рецензенты:
доктор физ.-матем. наук *М. К. Потапов*,
кандидат физ.-матем. наук *В. В. Вавилов*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Борис Иванович Александров, Иван Иванович Мельников,
Валерий Федорович Пахомов

ЗАДАЧИ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский.* Редактор *Р. Д. Солод.* Мл. редактор *О. Е. Силантьева.* Художественный редактор *Л. В. Мухина.* Обложка художника *А. А. Кущенко.* Технические редакторы *К. С. Чистякова, Г. Д. Колоскова.* Корректоры *Л. А. Кузнецова, Л. А. Костылева, Т. С. Милякова*

Сдано в набор 12.02.82 Подписано к печати 31.08.82 Л-110139 Формат 60×90¹/₁₆ Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 18,0 Уч.-изд. л. 17,15. Зак. 352. Тираж 20000 экз. Цена 70 коп. Изд. № 2049 Заказная

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» издательства МГУ.
Москва, Ленинские горы

© Издательство Московского университета, 1982 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ 4

§ 1. Графики функций и отношений 4
§ 2. Уравнения, неравенства, системы 15
§ 3. Целочисленные задачи 47
§ 4. Доказательство неравенств 56
§ 5. Задачи с параметрами 69

Глава II. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ . 88

§ 1. Функции, отношения, графики 88
§ 2. Уравнения, неравенства, системы 92
§ 3. Тригонометрические задачи 110
§ 4. Производная и ее применения 131
§ 5. Интеграл 153
§ 6. Доказательство неравенств 164
§ 7. Задачи с параметрами 168
§ 8. Планиметрия 178
§ 9. Стереометрия 190
§ 10. Разные задачи 197

Глава III. ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В МГУ 213

§ 1. Механико-математический факультет 213
§ 2. Факультет вычислительной математики и кибернетики . . 217
§ 3. Физический факультет 229
§ 4. Химический факультет 236
§ 5. Биологический факультет 240
§ 6. Факультет почвоведения 244
§ 7. Геологический факультет (отделение общей геологии) . . 246
§ 8. Геологический факультет (отделение геофизики) 252
§ 9. Географический факультет 258
§ 10. Экономический факультет (отделение политической экономии) 262
§ 11. Экономический факультет (отделение планирования и экономической кибернетики) 266
§ 12. Филологический факультет (отделение структурной и прикладной лингвистики) 269
§ 13. Факультет психологии 272
Ответы к вариантам II 276
Справочный материал 278

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет собой методическое руководство по математике для слушателей подготовительных курсов МГУ и ставит своей целью помочь читателю лучше подготовиться к конкурсным экзаменам по математике.

Подготовка к экзаменам рассчитана на один учебный год. Слушатели должны систематически работать над школьными учебниками, по которым необходимо повторить программу курса по математике. Никаких дополнительных знаний сверх школьной программы для поступления в Московский университет не требуется. Однако приобрести навыки решения экзаменационных задач, и особенно задач повышенной трудности, можно только в результате систематической напряженной работы.

Книга состоит из трех глав. В главе I даны методические указания к решению некоторых типов задач. Разобраны примеры. Глава II состоит из большого набора задач для самостоятельного решения. В основном эти задачи предлагались в различные годы на вступительных экзаменах в МГУ. Подобраны задачи на темы: «Производная и ее применение», «Интеграл», «Векторы», «Задачи с параметрами» и т. д. В главе III пособия приводятся варианты письменных вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ. Для первого варианта каждого факультета выполнен подробный разбор. Самостоятельное решение учащимися вторых вариантов письменных экзаменов будет способствовать закреплению приобретенных знаний. Отметим, что формулировки задач здесь те же, что и на вступительных экзаменах.

Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук профессору М. К. Потапову и кандидату физико-математических наук старшему научному сотруднику В. В. Вавилову, взявшим на себя труд по рецензированию этой книги и сделавшим ряд ценных указаний, а также сотруднице экономического факультета МГУ Л. И. Русановой, оказавшей большую помощь при подготовке рукописи.

Авторы

ГЛАВА I

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ И ОТНОШЕНИЙ

Напомним прежде всего, что *графиком* Γ_f функций $f(x)$ называется множество точек координатной плоскости вида $(x;\ f(x))$, где x пробегает D_f — область определения функции $f(x)$. Иными словами,

$$\Gamma_f=\{(x;\ f(x))\,|\,x\in D_f\}.$$

Если числовое отношение задается условием $g(x,\ y)=0$ или $g(x,\ y)\leqslant 0$, то графиком его является множество $\{(x;\ y)\,|\,g(x,\ y)=0\}$, или, соответственно, $\{(x;\ y)\,|\,g(x,\ y)\leqslant 0\}$.

При построении графиков важным аппаратом является метод элементарных преобразований. Напомним вкратце основные элементарные преобразования графиков.

1. *График функции* $y=f(x-a)$ *получается из графика функции* $y=f(x)$ *параллельным переносом на вектор* $\vec{r}=(a;\ 0)$, *т. е. параллельным переносом вдоль оси* Ox *на* a.

Действительно, рассмотрим функцию $g(x)=f(x-a)$; вычислим ее значение в точке $x+a$: $g(x+a)=f((x-a)-a)=f(x)$. Таким образом, точка графика $(x+a;\ g(x+a))$ совпадает с точкой $(x+a;\ f(x))$; в свою очередь, точка $(x+a;\ f(x))$ получается параллельным переносом на вектор $(a;\ 0)$ точки $(x;\ f(x))$ графика функции $f(x)$:

$$P_{(a;0)}(x;\ f(x))=(x+a;\ f(x)).$$

Поскольку эти рассуждения справедливы для любой точки графика $g(x)$, то весь график $g(x)$ получается из графика $f(x)$ параллельным переносом на вектор $(a;\ 0)$.

2. *График функции* $y=f(x)+b$ *получается из графика функции* $y=f(x)$ *параллельным переносом на вектор* $\vec{r}=(0;\ b)$.

Действительно, каждая точка $(x;\ f(x)+b)$ графика функции $y=f(x)+b$ получается параллельным переносом на $(0;\ b)$ точки графика $(x;\ f(x))$ функции $y=f(x)$:

$$P_{(0;b)}(x;\ f(x))=(x;\ f(x)+b).$$

Таким образом, и весь график функции $y=f(x)+b$ получается параллельным переносом на $\vec{r}=(0;\ b)$ графика функции $y=f(x)$.

Перечислим без доказательств еще несколько элементарных преобразований, упрощающих построение графиков функций.

3. *График функции* $y=kf(x)$, $k>0$, *получается растяжением графика функции* $y=f(x)$ *от оси* Ox *в* k *раз.*

4. *График функции* $y=f(kx)$, $k>0$, *получается сжатием к оси* Oy *в* k *раз графика функции* $y=f(x)$.

5. *График функции* $y=-f(x)$ *получается симметрией относительно оси* Ox *графика функции* $y=f(x)$.

6. *График функции* $y=f(-x)$ *получается симметрией относительно оси* Oy *графика функции* $y=f(x)$.

Доказательства этих полезных утверждений совершенно аналогичны первым двум. Советуем их провести самостоятельно или прочесть в школьном учебнике. Разберем несколько примеров, иллюстрирующих эти приемы.

Пример 1. Какими преобразованиями получается график функции $y=3x^2+6x-10$ из графика функции $y=x^2-1$?

Решение. Заметим, что

$$y=g(x)=3x^2+6x-10=3(x^2+2x+1)-13=3(x+1)^2-13.$$

Если обозначить $f(x)=x^2-1$, то $g(x)=3f(x+1)-10$. Теперь удобно представить преобразование, переводящее график $f(x)$ в график $g(x)$, в виде композиции элементарных преобразований следующим образом:

а) график $f(x)$ переводится в график $f(x+1)$ параллельным переносом на вектор $\vec{r}=(-1;\ 0)$, согласно утверждению 1 (достаточно взять $a=-1$);

б) график $f(x+1)$ переводится в график $3f(x+1)$ растяжением от оси Ox в 3 раза (утверждение 3);

в) график $3f(x+1)$ переводится в график $g(x)=3f(x+1)-10$ параллельным переносом на вектор $\vec{r}=(0;\ -10)$, согласно утверждению 2.

Окончательно получаем, что для того чтобы получить график функции $y=3x^2+6x-10$ из графика функции $y=x^2-1$, достаточно последний параллельно перенести на вектор $(-1;\ 0)$, затем растянуть в 3 раза от оси Ox и затем параллельно перенести на вектор $(0;\ -10)$.

Замечание 1. Все преобразования нужно совершать в указанной последовательности, так как в противном случае может получиться иной результат. Например, если сначала произвести параллельный перенос на вектор $\vec{r}=(-1;\ -10)$, а затем растяжение в 3 раза от оси Ox, то в результате получим:

а) при параллельном переносе на $\vec{r}=(-1;\ -10)$ график функции $y=f(x)=x^2-1$ перейдет в график функции

$$y=f(x+1)-10=(x+1)^2-1-10=x^2+2x-10;$$

б) при растяжении в 3 раза от оси Ox график функции $y=g(x)=x^2+2x-10$ перейдет в график функции

$$y=3g(x)=3x^2+6x-30.$$

Таким образом, при заданной последовательности преобразований мы получаем график функции $y=3x^2+6x-30$, а не требуемой выше.

Замечание 2. Отметим, что этот же график можно было бы получить и с помощью иной последовательности преобразований. А именно, представим нашу функцию иным образом:

$$y=3x^2+6x-10=3\left(x^2+2x+1-1-\frac{10}{3}\right)=$$

$$=3\left((x+1)^2-1-\frac{10}{3}\right)=3\left(f(x+1)-\frac{10}{3}\right),$$

где $f(x)=x^2-1$. Тогда можно было бы получить график $y=3x^2+6x-10$ из графика $f(x)$, если:

а) сначала произвести параллельный перенос на вектор $\vec{r}=\left(-1;\ -\frac{10}{3}\right)$, который переведет график $f(x)$ в график $g(x)=f(x+1)-\frac{10}{3}$;

б) затем растянуть полученный график в 3 раза от оси Ox, так как $3x^2+6x-10=3\cdot g(x)$.

Пример 2. Какими преобразованиями получается график функции $y=8\cdot 16^x$ из графика функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$?

Решение. Преобразуем выражение $8\cdot 16^x$:

$$y=8\cdot 16^x=8\cdot(2^4)^x=8\cdot 2^{4x}=8\left(\frac{1}{2}\right)^{-4x}=8f(-4x),$$

где $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Отсюда видно, что нужно сделать:

а) сжатие в 4 раза к оси Oy (оно переведет график $f(x)$ в график $f(4x)$);

б) затем симметрию относительно оси Oy (она переведет график $f(4x)$ в график $f(4(-x))=f(-4x)$);

в) затем растяжение в 8 раз от оси Ox.

Пример 3. Какими преобразованиями получается график функции $y=\sin x\cdot\cos x$ из графика функции $y=\cos x$?

Решение. Преобразуем первую из функций:

$$y=\sin x\cdot\cos x=\left(\frac{1}{2}\right)\sin(2x)=\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) f\left(2x - \frac{\pi}{2}\right), \text{ где } f(x) = \cos x.$$

Отсюда видно, что нужно сделать:

а) параллельный перенос на вектор $\vec{r} = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$, переводящий график функции $f(x) = \cos x$ в график функции $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) сжатие в 2 раза к оси Oy, переводящее график функции $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ в график функции

$$h(x) = g(2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right);$$

в) растяжение в $\frac{1}{2}$ раза (т. е. сжатие в 2 раза) от оси Ox, переводящее

$$h(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ в } y = \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$$

7. При построении графиков важно помнить следующее: *график функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$, если часть графика, находящуюся в нижней полуплоскости (ниже оси Ox), симметрично относительно этой оси отразить на верхнюю полуплоскость, а часть графика, находящуюся в верхней полуплоскости, оставить неподвижной.*

Действительно, по определению модуля имеем

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) \text{ при } f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

поэтому точка графика $(x; f(x))$, лежащая в верхней полуплоскости (т. е. такая, что $f(x) \geqslant 0$), совпадает с точкой $(x; |f(x)|)$.

С другой стороны, точка $(x; f(x))$, лежащая в нижней полуплоскости (т. е. такая, что $f(x) \leqslant 0$), симметрична точке $(x; -f(x)) = (x; |f(x)|)$ относительно оси Ox. На рис. 1 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$.

Пример 4. Построить график функции $y = |||x| - 2| - -1|$.

Решение. Будем строить последовательно графики функций:

$y_1 = |x|$; $y_2 = |x| - 2$; $y_3 = ||x| - 2|$; $y_4 = ||x| - 2| - 1$

и, наконец, $y = |||x| - 2| - 1|$. Возьмем в качестве исходного график функции $y_0 = x$, тогда $y_1 = |x| = |y_0|$, т. е. график функ-

ции $y_1=|x|$ получается из графика функции $y_0=x$ симметрией части, лежащей в нижней полуплоскости, на верхнюю полуплоскость (рис. 2).

Далее, график функции $y_2=|x|-2=y_1-2$ получается из графика функции $y_1=|x|$ параллельным переносом на $\vec{r}=(0;\ -2)$ (см. рис. 2). Затем график функции $y_3=||x|-2|=$

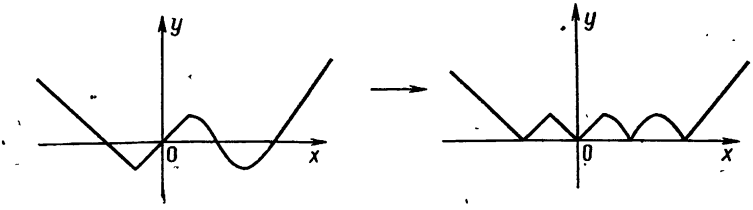


Рис. 1

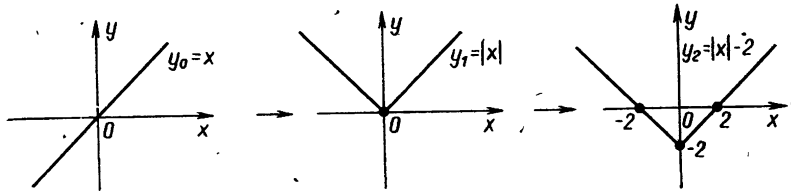


Рис. 2

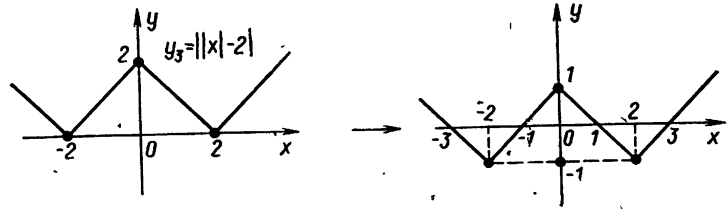


Рис. 3

$=|y_2|$ получается из графика функции $|y_2|$ симметрией части, лежащей в нижней полуплоскости, на верхнюю полуплоскость (рис. 3).

График функции $y_4=||x|-2|-1=y_3-1$ получается параллельным переносом на $\vec{r}=(0;\ -1)$ из графика y_3 (см. рис. 3). Наконец, $y=|||x|-2|-1|=|y_4|$, т. е. требуемый график получается из графика функции y_4 симметрией части графика, лежащей в нижней полуплоскости, на верхнюю (рис. 4).

8. При построении графиков функций иногда бывает очень полезен *метод интервалов.*

Пример 5. Построить график функции

$$y=|x-2|+|3-x|+|x|-2x.$$

Решение. Отметим на числовой прямой точки, в которых выражения, стоящие под знаками модулей, меняют знаки. Например, выражение $x-2$ отрицательно при $x<2$ и положительно при $x>2$, т. е. меняет знак в точке $x=2$. Отметим все такие точки на числовой прямой (см. рис. 5). Теперь на каждом из четырех получившихся промежутков ни одно из выражений не меняет знак. Сведем всю информацию о знаках в таблицу:

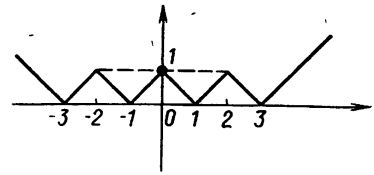


Рис. 4

Промежуток	$]-\infty;\ 0]$	$[0;\ 2]$	$[2,\ 3]$	$[3,\ +\infty[$
Знак $x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
Знак $3-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
Знак x	$-$	$+$	$+$	$+$

Теперь заметим, что:

а) на промежутке $]-\infty;\ 0]$ имеем $y=-(x-2)+(3-x)-x-2x=-5x+5$, т. е. график нашей функции совпадает с графиком функции $y=-5x+5$ (см. рис. 5);

б) на промежутке $[0;\ 2]$ имеем $y=-(x-2)+(3-x)+x-2x=-3x+5$, т. е. график нашей функции совпадает с графиком функции $y=-3x+5$ (см. рис. 5);

в) на промежутке $[2;\ 3]$ имеем $y=(x-2)+(3-x)+x-2x=-x+1$ (см. рис. 5);

г) на промежутке $[3;\ +\infty[$ имеем $y=(x-2)-(3-x)+x-2x=x-5$ (см. рис. 5).

Итак, на каждом промежутке график нашей функции совпадает с графиком какой-либо линейной функции, т. е. является лучом или отрезком какой-либо прямой. Чтобы построить эти лучи и отрезки, достаточно на каждом из них указать по две точки. Для отрезков очень удобно найти значения концов. Например, в случае б) найдем значения концов отрезка прямой $y=-3x+5$, $0\leqslant x\leqslant 2$; при $x=0$, $y=5$, т. е. один конец — точка $(0,\ 5)$; при $x=2$, $y=-1$, т. е. другой конец — точка $(2,\ -1)$. Окончательно получаем график, изображенный на рис. 5.

Пример 6. Изобразить график функции

$$y=|x^2-1|+x^2-|x+1|.$$

Решение. Найдем точки, в которых меняют знак выражения, находящиеся под знаками модулей. Эти точки суть $x=\pm 1$. Они разбивают всю числовую прямую на 3 промежутка:

Промежуток	$]-\infty;-1]$	$[-1;+1]$	$[1;+\infty[$
Знак x^2-1	+	−	+
Знак $x+1$	−	+	+

а) на промежутке $]-\infty;-1]$ имеем $y=(x^2-1)+x^2+(x+1)=2x^2+x$, т. е. наш график совпадает с «куском» параболы $y=2x^2+x$ (рис. 6);

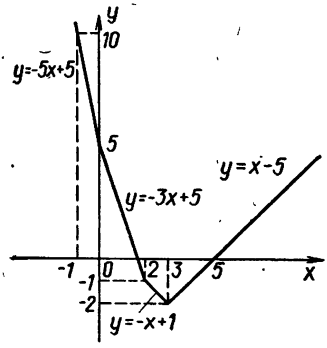


Рис. 5

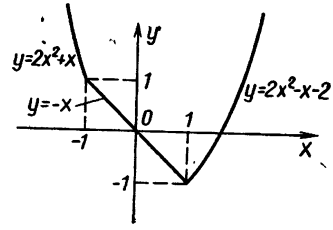


Рис. 6

б) на промежутке $[-1, 1]$ имеем $y=-(x^2-1)+x^2-(x+1)=-x$, т. е. наш график совпадает с «куском» прямой $y=-x$ (см. рис. 6);

в) на промежутке $[1, +\infty[$ имеем $y=(x^2-1)+x^2-(x+1)=2x^2-x-2$, т. е. график совпадает с «куском» параболы $y=2x^2-x-2$ (см. рис. 6).

9. При изображении графиков отношений часто полезным является прием, обобщающий метод интервалов. Этот прием можно назвать *методом областей*. Поясним его на нескольких примерах.

Пример 7. Изобразить график неравенства $(x+y)(x-y^2+1)\geqslant 0$.

Решение. Изобразим сначала кривые, на которых выражение $(x+y)(x-y^2+1)=0$, т. е. $x+y=0$ или $x-y^2+1=0$. Эти уравнения можно записать как $y=-x$ или $x=y^2-1$.

Первое из уравнений определяет прямую, являющуюся биссектрисой II и IV четвертей на плоскости Oxy. Второе уравнение определяет параболу, лежащую горизонтально. Действительно, если взять «неправильную» систему координат с вертикальной осью Ox и горизонтальной осью Oy, то график функции $x=y^2-1$ легко получить из графика функции $x=y^2$ параллельным переносом вдоль оси Ox на едини-

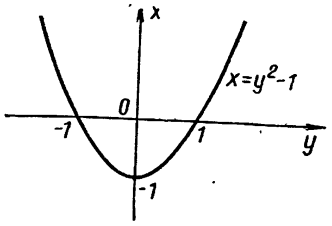


Рис. 7

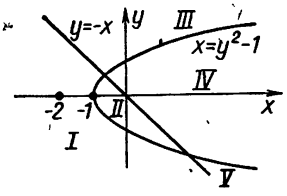


Рис. 8

цу вниз (рис. 7). Теперь, если построить симметричное отражение относительно оси $y=x$ (биссектрисы I и III четвертей), то оси координат «станут на свои места», и получится

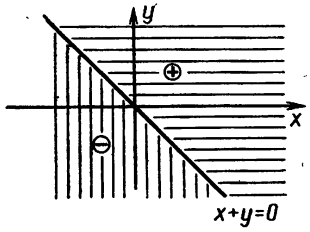


Рис. 9

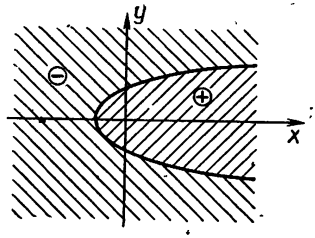


Рис. 10

график нашей кривой в обычных координатах. Изобразим теперь обе кривые на координатной плоскости Oxy (рис. 8). Они разбивают всю плоскость на 5 областей, в каждой из которых выражение $(x+y)(x-y^2+1)$ не меняет знак. Поэтому достаточно теперь найти этот знак в каждой из областей. Например, чтобы найти знак в области I, надо подставить любую точку из этой области в наше выражение, скажем, точку $(-2; 0)$: $(-2+0)(-2-0^2+1)=-2<0$, т. е. знак выражения в области I отрицательный и т. д. Можно поступить и несколько иначе. Заметим, что прямая $y=-x$ делит плоскость на две области, причем знаки выражения $(x+y)$ в этих областях отмечены на рис. 9.

Аналогично для кривой $x=y^2-1$ получаем картину знаков выражения $x-y^2+1$, изображенную на рис. 10.

Теперь для наших пяти областей можно составить таблицу:

Область	I	II	III	IV	V
Знак $x+y$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
Знак $x-y^2+1$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
Знак $(x+y)(x-y^2+1)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

Таким образом, видно, что $(x+y)(x-y^2+1)\geqslant 0$ в точности в I и IV областях (рис. 11).

Пример 8. Изобразить график уравнения

$$|y-x|+|y-2|+x=4. \qquad (1)$$

Решение. Применим метод областей, т. е. изобразим сначала прямые, на которых выражения, находящиеся под

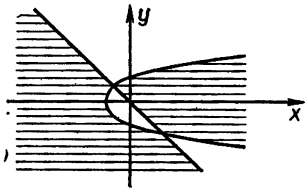


Рис. 11

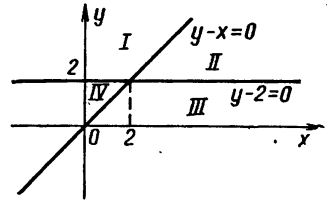


Рис. 12

знаками модулей, меняют знаки. Это прямые $y-x=0$ и $y-2=0$ (рис. 12). Эти прямые разбивают всю плоскость на четыре области; знаки выражений в этих областях приведены в таблице:

Область		II	III	IV
Знак $y-x$	$+$	$-$	$-$	$+$
Знак $y-2$	$+$	$+$	$-$	$-$

а) В первой области имеем: $|y-x|=y-x$; $|y-2|=y-2$; следовательно, наше уравнение (1) принимает вид

$$y-x+y-2+x=4\Leftrightarrow 2y=6\Leftrightarrow y=3.$$

График этого уравнения — часть горизонтальной прямой $y=3$, попавшая в область I (рис. 13).

б) Во второй области уравнение (1) принимает вид

$$-(y-x)+(y-2)+x=4\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3.$$

График — кусок вертикальной прямой $x=3$, попавший в область II (см. рис. 13).

в) В третьей области уравнение (1) принимает вид

$$-(y-x)-(y-2)+x=4\Leftrightarrow -2y+2x=2\Leftrightarrow y=x-1.$$

График — кусок прямой $y=x-1$, попавший в область III (см. рис. 13).

г) В четвертой области уравнение (1) принимает вид

$$(y-x)-(y-2)+=4\Leftrightarrow 2=4,$$

т. е. получается, что уравнение не выполняется ни для каких точек из области IV.

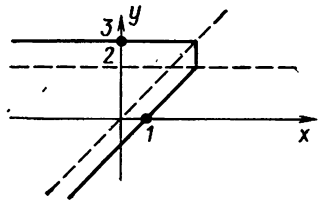


Рис. 13

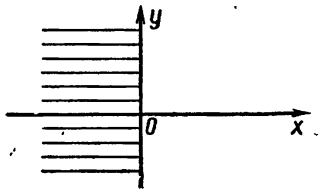


Рис. 14

Окончательно график изображен сплошной линией на рис. 13.

Пример 9. Построить график уравнения

$$(x+|x|)^2+(y-\sqrt{5-2x-x^2})^2=0. \qquad (1)$$

Решение. Прежде всего заметим, что $a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0$. Действительно, если хотя бы одно из чисел, скажем, $a\neq 0$, то $a^2>0$ и, кроме того, $b^2\geqslant 0$ для любого b. Добавляя к обеим частям неравенства $a^2>0$ одно и то же число b^2, получаем $a^2+b^2>0+b^2=b^2\geqslant 0$, откуда следует, что $a^2+b^2>0$. Поэтому равенство $a^2+b^2=0$ выполняется только при $a=b=0$. Эти рассуждения показывают, что уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x+|x|=0, & (2)\\ y-\sqrt{5-2x-x^2}=0. & (3)\end{cases}$$

Отсюда следует, что множество точек $(x;\ y)$, удовлетворяющее уравнению (1), должно удовлетворять уравнениям (2) и (3), т. е. принадлежать как графику уравнения (2), так и графику уравнения (3). Последнее означает, что это множество есть пересечение графиков уравнений (2) и (3). Пост-

роим теперь график уравнения (2); для этого нужно рассмотреть два случая:

а) $x \geqslant 0$, тогда $x+|x|=x+x=2x=0$, т. е. просто $x=0$;

б) $x \leqslant 0$, тогда $x+|x|=x-x=0$, т. е. уравнение выполняется для всех точек, у которых $x \leqslant 0$.

Окончательно получаем, что график уравнения (2) (с двумя переменными (x, y)!) есть множество $\Gamma_3=\{(x; y) \mid x \leqslant 0\}$, являющееся левой полуплоскостью плоскости Oxy (рис. 14).

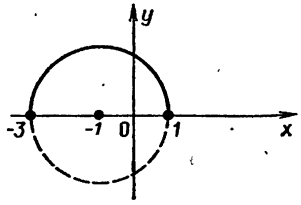


Рис. 15

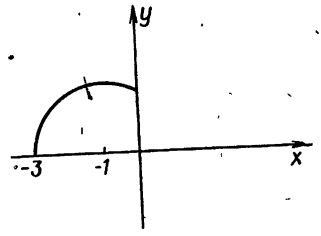


Рис. 16

Построим теперь график Γ_4 уравнения (3). Для этого преобразуем уравнение к виду

$$y=\sqrt{4-(1+2x+x^2)}=\sqrt{4-(x+1)^2}. \qquad (4)$$

Вспомним, что означает, что $a=\sqrt{b}$. По определению, квадратным корнем из b называется такое неотрицательное число a, что квадрат его равен b, т. е. в краткой форме:

$$a=\sqrt{b} \text{ означает, что } \begin{cases} a^2=b, \\ a \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, воспользовавшись определением, получаем: $y=\sqrt{4-(x+1)^2}$ *определяет то же множество, что и система*

$$\begin{cases} y \geqslant 0, & (6) \\ y^2=4-(x+1)^2. & (7) \end{cases}$$

Последняя система задает пересечение графика уравнения (7) с графиком уравнения (6) — верхней полуплоскостью плоскости Oxy. Чтобы построить график уравнения (7), приведем его к виду

$$y^2+(x+1)^2=4. \qquad (8)$$

Остается вспомнить, что расстояние на плоскости Oxy между точками $M=(x; y)$ и $N=(a; b)$ определяется по формуле $d(M, N)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Теперь, взяв $a=-1$ и $b=0$, можем представить уравнение (8) в виде $d^2(M, N)=(x-(-(-1)))^2+(y-0)^2=4$, или, что то же самое, $d(M, N)=2$.

Таким образом, мы видим, что график уравнения (7) — это множество точек $M=(x; y)$, удаленных от точки $N=(-1; 0)$ на 2, т. е. окружность с центром в $(-1; 0)$ радиуса 2 (рис. 15). График системы (6)—(7) — пересечение этой окружности с верхней полуплоскостью — изображен на рис. 15 сплошной линией. Наконец, график уравнения (1) — пересечение полученной полуокружности с левой полуплоскостью — изображен на рис. 16.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

1. Общие замечания

Решение уравнений, неравенств и систем часто сопровождается ненужной работой, которая отнимает у абитуриента много сил и времени, но, как правило, не спасает от ошибок. В то же время в решении исчезает направленность действий, и при чтении такой работы создается впечатление, что решающий задачу смутно представляет, что он делает. Во избежание недоразумений необходимо: во-первых, четко знать определения и основные свойства математических объектов, а во-вторых, сопровождать решение кратким комментарием, в котором указывается, как результат каждого последующего действия связан с предыдущим (получается ли следствие или равносильная задача, почему?). К сожалению, многие из абитуриентов практически не владеют формальными методами. Отсюда и возникают часто такие просчеты, что вся проделанная работа сводится на нет. Цель данного параграфа — показать некоторую совокупность приемов, чаще всего формальных, позволяющих аккуратно решать, по крайней мере, стандартные задачи. Следует сразу же отметить, что владение этими приемами необходимо, но не достаточно для решения многих задач. Универсальных же методов решения всех задач не существует, поэтому только большая практика может служить гарантией успеха на экзаменах.

Начнем с напоминания основных определений. Пусть задано некоторое множество уравнений и неравенств с переменными $(x, y, \ldots, z)$: $f_1(x, y, \ldots, z)=0, \ldots, f_m(x, y, \ldots, z)=0$, $g_1(x, y, \ldots, z)\leqslant 0, \ldots, g_s(x, y, \ldots, z)\leqslant 0$.

Системой (S) $\begin{cases} f_1=0 \\ \cdots \\ f_m=0 \\ g_1\leqslant 0 \\ \cdots \\ g_s\leqslant 0 \end{cases}$ называется предложение: «*Верны все равенства* $f_1=0, \ldots, f_m=0$ *и неравенства* $g_1\leqslant 0, \ldots, g_s\leqslant 0$».

Совокупностью (F) $\left[\begin{array}{l} f_1=0 \\ \ldots \\ f_m=0 \\ g_1\leqslant 0 \\ \ldots \\ g_s\leqslant 0 \end{array}\right.$ называется предложение: «*Верно хотя бы одно из равенств* $f_1=0, \ldots, f_m=0$ *или неравенств* $g_1\leqslant 0, \ldots, g_s\leqslant 0$».

Решением системы (совокупности) является упорядоченный набор значений переменных $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$, при подстановке которого в систему (совокупность) получится верное предложение. *Решить систему (совокупность) — значит найти все ее решения.*

В соответствии с определениями мы получаем, что:

а) множеством решений системы (S) является *пересечение* множеств решений всех уравнений и неравенств, входящих в систему (S);

б) множеством решений совокупности (F) является *объединение* множеств решений всех уравнений и неравенств, входящих в совокупность (F).

Система (S_1) является *следствием* системы (S_2) тогда и только тогда, *когда любое решение системы* (S_2) *является решением системы* (S_1). Тот факт, что (S_1) является следствием (S_2), символически записывают так:

$$(S_2)\Rightarrow(S_1).$$

По определению следствия получаем: если $(S_2)\Rightarrow(S_1)$ и OS_1 — множество решений системы (S_1), а OS_2 — множество решений системы (S_2), то $OS_2\subset OS_1$.

Системы (S_1) и (S_2) *равносильны* (эквивалентны) тогда и только тогда, когда *множества их решений совпадают*, т. е. любое решение одной из них является решением и другой. Символически равносильность записывают так:

$$(S_1)\Leftrightarrow(S_2).$$

Приведем несколько примеров следствий и равносильностей (эквивалентностей):

$$x^2=1\Leftrightarrow|x|=1,$$
$$x=1\Rightarrow x^2=1,$$
$$x^2=0\Leftrightarrow x^2\leqslant 0,$$
$$x^2=0\Rightarrow\sin x>-1,$$
$$x^2=-1\Rightarrow(x+1)^2=0.$$

Последний из примеров весьма поучителен. Именно *уравнение* $x^2=-1$ *не имеет корней, поэтому из него следует любое*

уравнение $f(x)=0$. В самом деле, предположим, что это не так, тогда существует решение уравнения $x^2=-1$, не являющееся решением уравнения $f(x)=0$. Но поскольку таких решений нет (ибо вообще нет решений уравнения $x^2=-1$), то предположение противного неверно. Кстати, этот факт легко понять, если вспомнить, что пустое множество $\varnothing$ (в данном случае множество решений уравнения $x^2=-1$ пусто) является подмножеством любого множества.

Итак, при решении уравнений и систем уравнений возникают два пути:

1) совершать равносильные переходы, тогда при каждом переходе множество корней сохраняется, и в конечном итоге мы получаем все решения исходной задачи;

2) совершать переходы к следствиям, при таких переходах множество корней может расшириться, т. е. появятся «посторонние корни», избавиться от которых можно путем проверки.

При решении неравенств второй путь практически невозможен. Дело в том, что, решая уравнение, мы чаще всего получаем в конце конечное число корней (обычно 2—3 корня), что позволяет найти посторонние корни путем подстановки полученных корней в исходное уравнение (или равносильное исходному уравнению). Решив же неравенство, мы, как правило, получаем бесконечное множество решений, что не позволяет сделать проверку. Таким образом, при решении неравенств остается фактически один путь — равносильные переходы. Поэтому мы уделим основное внимание равносильным переходам.

Простейшие равносильные переходы вытекают непосредственно из свойств равенств и неравенств. Они обычно широко используются и всем хорошо известны. Например, вспомним свойство равенств, заключающееся в том, что к обеим частям равенства можно прибавлять одно и то же число. Это свойство формально записывается так:

$$a=b \Leftrightarrow a+c=b+c. \qquad (1)$$

Почти все абитуриенты используют это свойство, когда «переносят» выражения из одной части равенства в другую, воспринимая последнюю операцию как некое правило решения уравнения и не помня его происхождения. А суть дела в том, что если в формулах (1) взять $c=-b$, то получим

$$a=b \Leftrightarrow a-b=b-b \Leftrightarrow a-b=0.$$

Аналогично используются и другие свойства равенств и неравенств. Перечислим их:

$$a=b \Leftrightarrow b=a;$$

$$\text{при } c\neq 0 \quad a=b \Leftrightarrow ac=bc;$$

$$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c;$$
$$a>b \Leftrightarrow b<a;$$
при $c>0$ $a>b \Leftrightarrow ac>bc$.

Однако использования только этих свойств недостаточно, чтобы решать содержательные задачи. Требуется умело пользоваться определениями. Например, рассмотрим определение квадратного корня:

корнем квадратным из числа a называется такое неотрицательное число b, что квадрат b равен a.

Формально это определение можно записать так:

$$\sqrt{a}=b \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=a, \\ b \geqslant a. \end{cases}$$

Отсюда вытекает и схема избавления от иррациональности: для решения уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$ надо, согласно определению корня, решить уравнение $f(x)=g^2(x)$ и проверить для корней условие $g(x) \geqslant 0$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-4}=16-x$.

Решение. По определению корня квадратного имеем

$$\sqrt{x-4}=16-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=(16-x)^2, & (1) \\ 16-x \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (1):

$$(1) \Leftrightarrow x-4=256-32x+x^2 \Leftrightarrow x^2-33x+260=$$
$$=0 \Leftrightarrow x=13 \text{ или } x=20.$$

Корень $x=20$ не удовлетворяет условию (2); $x=13$ удовлетворяет (2) и, значит, является решением системы (1)—(2).

Ответ: $x=13$.

Одним из важных приемов решения задач является использование следствий, которое мы сформулируем в виде леммы.

Лемма. *Если система (S_1) является следствием системы (S_2), то система (S_2) равносильна системе* $\begin{cases} (S_1), \\ (S_2). \end{cases}$

Доказательство. Пусть M_1 — множество решений системы (S_1) и M_2 — множество решений системы (S_2). По условию теоремы $M_2 \subset M_1$. Но тогда $M_2 \cap M_1 = M_2$. С другой стороны, множеством решений системы $\begin{cases} (S_1) \\ (S_2) \end{cases}$ является пересечение $M_2 \cap M_1$.

Таким образом, множеством решений системы $\begin{cases} (S_1) \\ (S_2) \end{cases}$ явля-

ется множество M_2, т. е. множество решений системы (S_2); значит,

$$\begin{cases} (S_1) \\ (S_2) \end{cases} \Leftrightarrow (S_2).$$

Доказательство окончено.

Кратко нашу лемму можно записать так:

$$[(S_2) \Rightarrow (S_1)] \Rightarrow \left[(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (S_1) \\ (S_2) \end{cases} \right].$$

Покажем, как можно применять указанную лемму, позволяющую включать и исключать следствия.

Пример 2. Решить систему $(S)\begin{cases} xy + yz = 18, \\ xz + zy = 20, \\ yx + xz = 8. \end{cases}$

Решение. Заметим, что, сложив все три уравнения системы (S), мы получим уравнение

$$2(xy+xz+yz) = 46 \Leftrightarrow xy+xz+yz = 23, \qquad (1)$$

которое является следствием системы (S). (Действительно, если какая-нибудь тройка (x_0, y_0, z_0) удовлетворяет (S), то $(x_0y_0+y_0z_0)+(x_0z_0+z_0y_0)+(y_0x_0+x_0z_0) = 18+20+8$, т. е. $x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0 = 23$ и, значит, (x_0, y_0, z_0) является решением уравнения (1).) Согласно лемме, имеем:

$$(S)\begin{cases} xy + yz = 18, \\ xz + zy = 20, \\ yx + xz = 8, \end{cases} \Leftrightarrow (S_1)\begin{cases} xy + xz + yz = 23, & (2) \\ xy + yz = 18, & (3) \\ xz + zy = 20, & (4) \\ yx + xz = 8. & (5) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (2) последовательно уравнения (3), (4), (5), мы получим следующие следствия из (S_1): $xz=5$, $xy=3$, $yz=15$ и, значит, следствия (S). Поэтому

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3, \\ xz = 5, \\ yz = 15, \\ xy + yz = 18, \\ xz + zy = 20, \\ yx + xz = 8, \end{cases}$$

где, как легко видеть, три последних уравнения являются следствием из системы

$$(S_3)\begin{cases} xz = 5, \\ xy = 3, \\ yz = 15; \end{cases}$$

еще раз воспользовавшись леммой, получаем $(S) \Leftrightarrow (S_3)$. Заметим, что $(S_3) \Rightarrow (xyz)^2 = 5 \cdot 3 \cdot 15$ (перемножили уравнения в (S_3)), т. е. $xyz = \pm 15$. По лемме

$$(S_3) \begin{cases} xz = 5, \\ xy = 3, \\ yz = 15, \end{cases} \Leftrightarrow (S_4) \begin{cases} xyz = \pm 15, \\ xz = 5, \\ xy = 3, \\ yz = 15. \end{cases}$$

В (S_4), подставив $xz = 5$ в первое уравнение, получим $y = \pm 3$, что является следствием из (S_4); аналогично, подставляя $xy = 3$ и $yz = 15$, получаем совокупность двух систем

$$\begin{cases} y = 3, \\ z = 5, \\ x = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = -3, \\ z = -5, \\ x = -1, \end{cases}$$

значит,

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 5, \\ xy = 3, \\ yz = 15, \\ x = 1, \\ y = 3, \\ z = 5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xz = 5, \\ xy = 3, \\ yz = 15, \\ x = -1, \\ y = -3, \\ z = -5. \end{cases}$$

Остается заметить, что в каждой из этих систем первые три уравнения являются следствием трех последних, откуда по лемме получаем

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \\ z = 5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -3, \\ z = -5. \end{cases}$$

Ответ: $(x, y, z) \in \{(1; 3; 5), (-1; -3; -5)\}$.

Обычно решение конкурсной задачи сводится к последовательному решению простейших задач.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - \sqrt{2x^2 + 3x - 2}} = x - 1.$$

Решение. По определению корня квадратного имеем

$$\sqrt{x^2 - \sqrt{2x^2 + 3x - 2}} = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2x^2 + 3x - 2} = (x - 1)^2, & (1) \\ x - 1 \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (1):

$$(1) \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{2x^2+3x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-2=(2x-1)^2, & (3) \\ 2x-1 \geqslant 0. & (4) \end{cases}$$

Решим уравнение (3):

$$(3) \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0,$$

откуда получаем

$$(3) \Leftrightarrow x=\frac{7 \pm \sqrt{49-4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=1/2. \end{array}\right.$$

Корни $x=3$ и $x=1/2$ удовлетворяют условию (4) и, значит, являются корнями уравнения (1). Однако корень $x=1/2$ не удовлетворяет условию (2), корень $x=3$ удовлетворяет условию (2). Поэтому решением системы (1)—(2), т. е. корнем исходного уравнения, является только $x=3$.

Ответ: $x=3$.

Итак, если мы пользуемся непосредственно определением, а также если включаем или исключаем следствия, то получаем равносильные переходы. Однако только этих приемов бывает зачастую недостаточно для решения задачи. Важный прием состоит в использовании тождеств. Например, если в уравнении (неравенстве) встретилось выражение вида $(\sqrt{f(x)})^2$, то его естественно заменить на $f(x)$. Схематически это обозначается так: $(\sqrt{f})^2 \to f$. Однако тождество $(\sqrt{f(x)})^2 = f(x)$ справедливо только при тех x, для которых $f(x) \geqslant 0$. Другими словами, эта замена расширяет область определения, поэтому при такой замене следует добавить условие $f(x) \geqslant 0$. Мы получаем следующую схему:

$$(\sqrt{f(x)})^2 \xrightarrow[f(x) \geqslant 0]{} f(x), \qquad (A)$$

которую нужно рассматривать как правило при равносильных переходах.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{19-x}. \qquad (1)$$

Решение.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-2=(\sqrt{19-x})^2, \\ \sqrt{19-x} \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow x^2+3x-2=(\sqrt{19-x})^2, \qquad (2)$$

так как квадратный корень всегда неотрицателен. В уравне-

нии (2) заменяем правую часть по схеме (А):

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-2=19-x, \\ 19-x \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-21=0, & (3) \\ x \leqslant 19, & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-7 \end{array}\right. \text{ (оба корня удовлетворяют условию (4)).}$$

Ответ: $x \in \{-7; 3\}$.

Кроме упомянутого *условного тождества* существует еще целый ряд полезных условных тождеств. Приведем некоторые из них, записанные в виде *схем подстановок*:

$$\sqrt{f}\sqrt{g} \xrightarrow[\substack{f\geqslant 0 \\ g\geqslant 0}]{} \sqrt{fg}; \quad 2n\log_a f \xrightarrow{f>0} \log_a f^{2n};$$

$$a^{\log_a f} \xrightarrow{f>0} f; \quad \log_a f + \log_a g \xrightarrow[(g>0)]{f>0} \log_a (fg).$$

В последней схеме запись $f>0$ $(g>0)$ означает, что надо добавлять либо условие $f>0$, либо $g>0$, в общем то, которое проще.

При использовании *абсолютных тождеств* никаких дополнительных условий не возникает, однако тождеств такого рода не так уж много, да и не всегда школьники их правильно запоминают. Приведем несколько примеров абсолютных тождеств:

$$\sqrt[2n]{|fg|} = \sqrt[2n]{|f|}\,\sqrt[2n]{|g|}; \quad \sqrt{f^2} = |f|;$$

$$\log_a a^f = f; \quad \log_a |f|^\alpha = \alpha \log_a |f|;$$

$$\log_a |fg| = \log_a |f| + \log_a |g|.$$

Наконец, один из важнейших приемов решений уравнений и особенно неравенств состоит в применении соображений монотонности. Напомним, что функция f является возрастающей на промежутке I тогда и только тогда, когда

$$x>y \Leftrightarrow f(x)>f(y) \qquad \text{(В)}$$

для любых x и y из промежутка I. Это свойство (В) и дает метод получения равносильных неравенств и уравнений. Действительно, пусть дано неравенство $g(x)>h(x)$, причем значения функций g и h принадлежат промежутку возрастания некоторой функции f, тогда

$$g(x)>h(x) \Leftrightarrow f(g(x))>f(h(x)).$$

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-5x+4} < \sqrt{4-x^2}.$$

Решение. Поскольку правая и левая части неравенства неотрицательны, а на $[0, +\infty[$ функция $y=x^2$ возрастает, то

$$\sqrt{x^2-5x+4} < \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-5x+4})^2 < (\sqrt{4-x^2})^2. \quad (1)$$

Далее, поскольку $(\sqrt{f})^2$ можно заменить на f, добавив $f \geqslant 0$, то

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4 < 4-x^2, & (2) \\ x^2+5x+4 \geqslant 0, & (3) \\ 4-x^2 \geqslant 0. & (4) \end{cases}$$

Теперь заметим, что неравенство (4) следует из системы (2)—(3): $0 \leqslant x^2+5x+4 < 4-x^2 \Rightarrow 4-x^2 \geqslant 0$. Это позволяет, согласно приведенной выше лемме, исключить из системы (2)—(4) неравенство (4):

$$\begin{cases} (2) \\ (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4 < 4-x^2, \\ x^2+5x+4 \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x < 0, & (2) \\ x^2+5x+4 \geqslant 0, & (3) \end{cases}$$

Решим неравенство (2):

$$2x^2-5x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{5}{2}.$$

Решим неравенство (3):

$$x^2-5x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x \geqslant 4. \end{array}\right.$$

Таким образом, система (2)—(3) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x \geqslant 4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 1.$$

Ответ: $0 < x \leqslant 1$.

Продемонстрируем, как применяются соображения монотонности при решении иррационального неравенства

$$\sqrt{f(x)} > g(x). \quad (C)$$

Здесь возможны два случая: либо $g(x) \geqslant 0$, либо $g(x) < 0$, т. е. неравенство (C) равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} > g(x), & (1) \\ g(x) \geqslant 0, & (2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{f(x)} > g(x), & (3) \\ g(x) < 0. & (4) \end{cases}$$

В первом случае, так как $\sqrt{f}\geqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$, мы можем к обеим частям неравенства (1) применить возрастающую на луче $[0, +\infty[$ функцию $y=x^2$, т. е., попросту говоря, возвести в квадрат обе части:

$$\begin{cases} (1) \\ \Leftrightarrow \\ (2) \end{cases} \begin{cases} f(x) > g^2(x), & (5) \\ g(x) \geqslant 0, & (6) \\ f(x) \geqslant 0, & (7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g^2(x), & (5) \\ g(x) \geqslant 0. & (6) \end{cases}$$

Здесь условие (7) появилось в результате использования подстановки $(\sqrt{f})^2 \xrightarrow[f\geqslant 0]{} f$. Однако, как легко далее заметить, это условие является следствием неравенства (5): так как квадрат любого действительного числа неотрицателен, то $g^2(x)\geqslant 0$ и, следовательно,

$$f(x) > g^2(x) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) > 0.$$

Как уже говорилось выше, следствие можно исключить из системы, получая при этом равносильную систему (5)—(6).

Во втором случае, поскольку $\sqrt{f}(x)\geqslant 0$, а $g(x)<0$, неравенство (3) выполняется для всех x, при которых определена и правая и левая части, т. е.

$$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

В итоге получаем схему равносильного перехода

$$\sqrt{f} > g \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{1+4x-x^2} > x-2$.

Решение.

$$\sqrt{1+4x-x^2} > x-2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} (S_1) \begin{cases} x-2<0, \\ 1+4x-x^2 \geqslant 0, \end{cases} \\ \text{или} \\ (S_2) \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 1+4x-x^2 > x^2-4x+4 \end{cases} \end{array}$$

Решим систему (S_1):

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ 2-\sqrt{5} \leqslant x < 2+\sqrt{5}, \end{cases} \Leftrightarrow 2-\sqrt{5} \leqslant x < 2.$$

Решим систему (S_2):

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 2x^2-8x+3<0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 2-\sqrt{\frac{10}{2}} < x < 2+\sqrt{\frac{10}{2}}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \leqslant x < 2+\sqrt{\frac{10}{2}}.$$

Ответ: $\left[2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{\frac{10}{2}}\right[$.

2. Рациональные уравнения, неравенства и системы

Рассмотрим уравнение $p(x)g(x)=0$, где $p(x)$ и $g(x)$ — многочлены. Поскольку произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю и каждый многочлен определен на всей числовой прямой, получаем следующую схему равносильного перехода:

$$p(x)\,g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right.$$

На этом же принципе основан метод разложения систем.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=2(x+y), & (1) \\ x^2+y^2=8. & (2) \end{cases}$$

Решение. Уравнение (1) очевидным образом разлагается:

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)-2(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0, \\ x-y-2=0. \end{array}\right.$$

Поэтому наша система (1)—(2) разлагается в совокупность систем:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0, \\ x-y-2=0, \\ x^2+y^2=8, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (S_1)\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8, \end{cases} \text{ или } (S_2)\begin{cases} x-y-2=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

В свою очередь, каждая из систем (S_1) и (S_2) решается обычным методом подстановки:

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ x^2+(-x)^2=8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ x^2=4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ x=\pm 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-2, \\ y=2. \end{cases}$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2, \\ x^2+(x-2)^2=8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2, \\ 2x^2-4x-4=0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2, \\ x=1\pm\sqrt{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{3}, \\ y=\sqrt{3}-1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=1-\sqrt{3}, \\ y=-1-\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(x, y) \in \{(2; -2), (-2; 2), (1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}), (1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})\}$.

Рассмотрим уравнение $\frac{p(x)}{g(x)}=0$, где $p(x)$ и $g(x)$ — многочлены. Поскольку многочлены определены на всей числовой прямой и дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, мы получаем следующую схему равносильных переходов:

$$\frac{p(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{(x+1)^2(x-1)(x-2)}{(x^2-1)(x+3)}=0. \qquad (1)$$

Решение.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(x-1)(x-2)=0, & (2) \\ (x^2-1)(x+3)\neq 0. & (3) \end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=0, \\ x-1=0, \\ x-2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x=1, \\ x=2. \end{cases}$$

Корни $x=\pm 1$ не удовлетворяют условию (3); корень $x=2$ удовлетворяет условию (3).

Ответ: $x=2$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{x}{x^2+7x+12}=\frac{x}{x^2+3x+2}. \qquad (1)$$

Решение.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+7x+12}-\frac{x}{x^2+3x+2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2+3x+2)-x(x^2+7x+12)}{(x^2+7x+12)(x^2+3x+2)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(-4x-10)}{(x^2+7x+12)(x^2+3x+2)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(-4x-10)=0, & (2)\\ (x^2+7x+12)(x^2+3x+2)\neq 0. & (3)\end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\\ -4x-10=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\\ x=-\frac{5}{2}.\end{array}\right.$$

Оба корня удовлетворяют условию (3):

$$x=0\Rightarrow (0+7\cdot 0+12)(0+3\cdot 0+2)=24\neq 0,$$

$$x=-\frac{5}{2}\Rightarrow \left(\frac{25}{4}-\frac{35}{2}+12\right)\left(\frac{25}{4}-\frac{15}{2}+12\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}\neq 0.$$

Ответ: $\left\{0;\ -\frac{5}{2}\right\}$.

При решении рациональных уравнений и неравенств часто используют замену переменных. Проиллюстрируем этот важный прием на примерах.

Пример 4. Решить уравнение

$$(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=24. \qquad (1)$$

Решение. Перемножив в левой части первый сомножитель с последним, а второй с третьим, получим

$$(1)\Leftrightarrow [(x+3)(x+6)]\cdot[(x+4)(x+5)]=24\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20)=24. \qquad (2)$$

Обозначим $y=x^2+9x+18$, тогда $x^2+9x+20=y+2$; таким образом, в новых обозначениях уравнение (2) принимает вид

$$y(y+2)=24\Leftrightarrow y^2+2y-24=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4,\\ y=-6.\end{array}\right.$$

Отсюда получаем

$$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+9x+18=4,\\ x^2+9x+18=-6,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+9x+14=0, & (3)\\ x^2+9x+24=0. & (4)\end{array}\right.$$

Корни уравнения (3): $x=-7$ или $x=-2$; уравнение (4) не имеет корней.

Ответ: $\{-2; -7\}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(x-1)^4+(x+3)^4=626. \qquad (1)$$

Решение. Формально это уравнение четвертой степени, значит, его надо попытаться свести к квадратному или биквадратному уравнению. Попробуем привести его к уравнению вида $(y-a)^4+(y+a)^4=626$, которое, по сути, является биквадратным. Для этого достаточно, чтобы $y-a=x-1$ и $y+a=x+3$. Сложив эти уравнения, получим $2y=2x+2$, т. е. $y=x+1$, или, то же самое, $x=y-1$. Итак, обозначим $y=x+1$, тогда уравнение (1) относительно y примет вид

$$(y-2)^4+(y+2)^4=626\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^4-8y^3+24y^2-32y+16+y^4+8y^3+24y^2+32y+16=626\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^4+48y^2+32-626=0\Leftrightarrow y^4+24y^2-297=0. \qquad (2)$$

Для решения биквадратного уравнения (2) вычислим дискриминант

$$D=24^2+4\cdot 297=3^2\cdot 2^6+2^2\cdot 3^3\cdot 11=2^2\cdot 3^2(2^4+3\cdot 11)=$$
$$=2^2\cdot 3^2\cdot 7^2.$$

(Если при вычислении появляются общие множители, то удобнее их выносить за скобки.) Итак,

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y^2=9,\\ y^2=-33 \text{ (не имеет решений)},\end{array}\right.\Leftrightarrow y^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=3,\\ y=-3,\end{array}\right.$$

соответственно, так как $y-1=x$, получаем $\left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=-4.\end{array}\right.$

Ответ: $x=2$ или $x=-4$.

Пример 6. Решить уравнение

$$4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=13\left(x+\frac{1}{x}\right). \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что уравнение не меняется при замене x на $\frac{1}{x}$; это означает, что вместе с каждым корнем x_0 корнем является и $\frac{1}{x_0}$. Последнее соображение подсказывает, что есть смысл попробовать сделать замену $y=x+\frac{1}{x}$, поскольку корни уравнений вида $x+\frac{1}{x}=A$ обладают ука-

занным свойством.

Итак, пусть $y = x + \frac{1}{x}$, тогда

$$y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3y,$$

т. е.

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y.$$

Таким образом, уравнение (1) относительно переменной y примет вид

$$4(y^3 - 3y) = 13y \Leftrightarrow 4y^3 - 25y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(4y^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ 4y^2 = 25, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = \frac{5}{2}, \\ y = -\frac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 0, \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \frac{1}{2}, \\ x = -2, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\pm 2; \pm\frac{1}{2}\right\}$.

При решении рациональных неравенств одним из эффективных приемов, позволяющих существенно сократить и упорядочить работу, является метод интервалов, обоснование которого приводится в школьном учебнике. Мы же рассмотрим примеры использования метода интервалов.

Пример 7. Решить неравенство $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) > 24$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = (x+3)(x+4)(x+5)(x+6) - 24$; отметим на числовой прямой точки, в которых она обращается в нуль, т. е. корни уравнения $f(x) = 0$. Это уравнение решено в примере 4 этого раздела; соответствующие точки $x = -7$ и $x = -2$ делят числовую прямую на 3 промежутка, в каждом из которых функция сохраняет знак; эти промежутки $]-\infty; -7[$, $]-7; -2[$ и $]-2; +\infty[$. Чтобы найти знак функции в каждом из промежутков, нужно взять

по одной точке из каждого промежутка и вычислить в них значения функции. Удобно составить таблицу:

Промежуток	$]-\infty; -7[$	$]-7; -2[$	$]-2; +\infty[$
Точка	$x=-8$	$x=-5$	$x=-1$
Значение $f(x)$	96	—24	96
Знак $f(x)$	+	—	+

Отсюда видно, что $f(x)>0$, т. е. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)>24$ на промежутках $[-\infty; -7[$ и $]-2; +\infty[$.

Ответ: $x\in]-\infty; -7[\cup]-2; +\infty[$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{x-2}{x+2}\geqslant\frac{2x-3}{4x-1}. \qquad (1)$$

Решение. Преобразуем неравенство (1):

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x-2}{x+2}-\frac{2x-3}{4x-1}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{2x^2-10x+8}{(x+2)(4x-1)}\geqslant 0. \qquad (2)$$

Найдем точки, в которых числитель или знаменатель обращается в нуль:

$$2x^2-10x+8=0\Leftrightarrow x=1 \text{ или } x=4;$$

$$(x+2)(4x-1)=0\Leftrightarrow x=-2 \text{ или } x=\frac{1}{4}.$$

Отметим их на числовой прямой, причем поскольку точки, в которых знаменатель обращается в нуль, не принадлежат области определения рациональной функции, мы их обозначим полыми кружками (рис. 17); точки, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, являются решениями неравенства (2), мы их обозначим жирными точками (см. рис. 17).

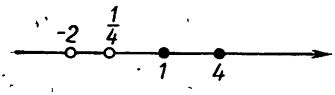


Рис. 17

Теперь видно, что указанные 4 точки делят всю числовую прямую на 5 промежутков. Составим таблицу:

Промежуток	$]-\infty;-2]$	$]-2;\frac{1}{4}[$	$]\frac{1}{4},1]$	$[1,4]$	$[4;+\infty[$
Знак $x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
Знак $4x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
Знак $2x^2-10x+8$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
Знак дроби	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Мы видим, что дробь неотрицательна на первом, третьем и пятом промежутках.

Ответ: $x\in]-\infty;\ -2[\cup]\frac{1}{4};\ 1]\cup[4;\ +\infty[$.

Метод интервалов сильно сокращает вычислительную работу по сравнению со стандартным методом равносильного перехода:

$$\frac{p(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}p(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}p(x)\leqslant 0,\\ g(x)<0,\end{cases}$$

особенно в тех случаях, когда степени числителя и знаменателя не меньше 2.

При решении систем уравнений часто полезными являются следующие переходы:

$$(S_1)\begin{cases}f=0,\\ g=0,\end{cases}\Leftrightarrow(S_2)\begin{cases}f+g=0,\\ g=0,\end{cases}\Leftrightarrow(S_3)\begin{cases}f+g=0,\\ f-g=0,\end{cases}$$

и вообще при $ad-bc\neq 0$:

$$(S_1)\Leftrightarrow\begin{cases}af+bg=0,\\ cf+dg=0.\end{cases}$$

Проверим, например, что $(S_1)\Leftrightarrow(S_2)$. Пусть $(x_0, y_0, ..., z_0)$ — решение системы (S_1), т. е. $f(x_0, y_0, ..., z_0)=0$ и $g(x_0, y_0, ..., z_0)=0$, тогда и $f(x_0, y_0, ..., z_0)+g(x_0, y_0, ..., z_0)=0$, т. е. $(x_0, y_0, ..., z_0)$ — решение системы (S_2). Покажем теперь, что и, наоборот, каждое решение $(x_0, y_0, ..., z_0)$ системы (S_2) является решением системы (S_1): так как $(x_0, y_0, ..., z_0)$ — решение (S_2), то $g(x_0, y_0, ..., z_0)=0$ и $0=f(x_0, y_0, ..., z_0)+g(x_0, y_0, ..., z_0)=f(x_0, y_0, ..., z_0)+0$, т. е. и $f(x_0, y_0, ..., z_0)=0$, значит, $(x_0, y_0, ..., z_0)$ — решение системы (S_1). Аналогично доказываются и равносильности остальных переходов.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 = 5x + 3y, & (1) \\ y^3 = 3x + 5y. & (2) \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся переходом $(S_1) \Leftrightarrow (S_3)$, упомянутым выше:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x - 3y = 0, \\ y^3 - 3x - 5y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 - 8(x + y) = 0, & (3) \\ x^3 - y^3 - 2(x - y) = 0. & (4) \end{cases}$$

Система (3)—(4) разлагается в совокупность систем:

$$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 8) = 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (S_1), \\ (S_2), \\ (S_3), \\ (S_4), \end{array}\right.$$

где

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0, \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 2, \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 8, \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 8 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решаем (S_1)

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x = y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0, \\ x = y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Решаем (S_2)

$$\begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 + (-y)y + y^2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решаем (S_3)

$$\begin{cases} x = y, \\ y^2 - y^2 + y^2 = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ y^2 = 8, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}, \\ y = 2\sqrt{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -2\sqrt{2}, \\ y = -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Для решения системы (S_4) удобно дважды воспользоваться

той же схемой равносильного перехода, что и вначале:

$$(S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy-6=0, \\ 2x^2+2y^2-10=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy=-6, \\ x^2+y^2=5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=5-6, \\ x^2-2xy+y^2=5+6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=-1, \\ (x-y)^2=11, \end{cases}$$

поскольку первое из этих уравнений не имеет решений, то и вся система (S_4) не имеет решений.

Ответ: $(x, y) \in \{(0; 0), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})\}$.

3. Уравнения и неравенства с модулями

Напомним, что, по определению,

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Из определения видно, что при решении задач с модулями приходится рассматривать различные случаи знаков выражений, модули которых входят в уравнения или неравенства.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2-2x+|x^2-x|+1=0. \qquad (1)$$

Решение. Поскольку по определению модуля

$$|x^2-x| = \begin{cases} x^2-x \text{ при } x^2-x \geqslant 0, \\ -x^2+x \text{ при } x^2-x \leqslant 0, \end{cases}$$

то

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x+x^2-x+1=0, \\ x^2-x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x-x^2+x+1=0, \\ x^2-x \leqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2-3x+1=0, & (2) \\ x^2-x \geqslant 0, & (3) \end{cases} \\ \begin{cases} -x+1=0, & (4) \\ x^2-x \leqslant 0. & (5) \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим уравнение (2):

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=1/2. \end{array}\right.$$

Проверим для этих корней условие (3):
при $x=1$ получаем $1^2-1=0$ (условие (3) выполнено);
при $x=\frac{1}{2}$ получаем $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}<0$ (условие (3) не выполнено). Итак, система (2)—(3) имеет один корень $x=1$.

В системе (4)—(5) первое уравнение дает $x=1$ и условие (5) для этого значения также выполнено, т. е. система (4)—(5) имеет тот же корень $x=1$. Поэтому уравнение (1) имеет единственный корень $x=1$.

Ответ: $x=1$.

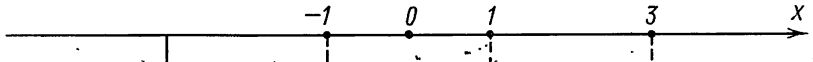
Пример 2. Решить уравнение

$$|x+1|-|2x-6|+|1-x|-x+4=0. \qquad (1)$$

Решение. В этой задаче три модуля, поэтому рассмотрение всех вариантов знаков трех выражений $x+1$, $2x-6$, $1-x$ привело бы к рассмотрению 8 случаев. Этого легко избежать, если применить метод интервалов. Именно, найдем точки, в которых хотя бы одно из этих выражений обращается в нуль:

$$x+1=0\Leftrightarrow x=-1;\ 2x-6=0\Leftrightarrow x=3;$$
$$1-x=0\Leftrightarrow x=1.$$

Эти три точки делят числовую прямую на 4 промежутка, в каждом из которых все три выражения сохраняют знаки. Проще всего изобразить это на такой таблице:



Знак x+1	−	+	+	+
Знак 2x−6	−	−	−	+
Знак 1−x	+	+	−	−
Промежуток	$]-\infty;-1]$	$[-1;1]$	$[1;3]$	$[3;+\infty[$

Из таблицы видно, что для решения задачи следует рассмотреть четыре случая, т. е. решить совокупность из четырех систем:

$$\text{I}\begin{cases} x\leqslant -1, \\ -(x+1)+(2x-6)+(1-x)-x+4=0, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\leqslant -1, \\ -x-2=0, \end{cases}\Leftrightarrow x=-2;$$

$$\text{II}\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1, \\ (x+1)+(2x-6)+(1-x)-x+4=0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x=0, \end{cases}\Leftrightarrow x=0;$$

$$\text{III}\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 3, \\ (x+1)+(2x-6)-(1-x)-x+4=0, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 3x = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$ (нет решений);

$$\text{IV} \begin{cases} x \geqslant 3, \\ (x+1) - (2x-6) - (1-x) - x + 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ -x + 10 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x = 10, \end{cases} \Leftrightarrow x = 10.$$

Ответ: $x \in \{-2; 0; 10\}$.

Рассмотрим теперь, как решаются неравенства вида $|f(x)| < g(x)$. По определению модуля имеем

$$(1)\ |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ -f(x) < g(x), \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ f(x) > -g(x), \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant f(x) < g(x), \\ -g(x) < f(x) \leqslant 0, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x). \qquad (2)$$

Заметим, что так как $|f(x)| \geqslant 0$ (модуль любой величины есть неотрицательная величина), то следствием неравенства (1) является условие

$$g(x) > 0. \qquad (3)$$

Поскольку следствие можно добавлять в условия и при этом получим равносильную задачу, то можно выписать такую схему равносильного перехода:

$$(1)\ |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -g(x) < f(x) < g(x), & (2) \\ g(x) > 0. & (3) \end{cases}$$

Условие (3) удобно приписывать к системе неравенств (2) (хотя можно и не приписывать, так как оно следствие (2)!), поскольку невыполнение его влечет противоречивость системы (2). Другими словами, прежде чем решать неравенство (1), полезно посмотреть, каков может быть знак правой части $g(x)$. Если $g(x) \leqslant 0$, то неравенство (1) не имеет решений.

Пример 3. Решить неравенство

$$|\sin x + 2\cos 2x| < \sqrt{17} - 3\sqrt{2}.$$

Решение. Выясним знак правой части $\sqrt{17} - 3\sqrt{2} = \sqrt{17} - \sqrt{18} < 0$; следовательно, неравенство не имеет решений.

Ответ: Нет решений (или $x \in \varnothing$).

Пример 4. Решить неравенство

$$|x^2 + x - 1| < 2x - 1. \qquad (1)$$

Решение. Неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$-2x + 1 < x^2 + x - 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 2 > 0, & (2) \\ x^2 - x < 0. & (3) \end{cases}$$

Решим неравенство (3):

$$(3) \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Решим неравенство (2):

$$(2) \Leftrightarrow x > \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{ или } x < \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}.$$

Система (2) — (3) равносильна системе $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < x < 1$.

Ответ: $x \in \left]\frac{\sqrt{17} - 3}{2}; 1\right[$.

Иногда неравенство $g(x) > 0$ только усложняет решение задачи.

Пример 5. Решить неравенство

$$|x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3| < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3. \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что неравенство $g(x) = x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3 > 0$ высокой степени, и решать его мы не умеем (за исключением тех случаев, когда коэффициенты подобраны специальным образом); поэтому лучше воспользоваться схемой $|f| < g \Leftrightarrow -g < f < g$. Согласно этой схеме

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^7 - 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3, \\ x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^7 + 4x^5 > 0, \\ x^2 + 2x - 3 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5(x^2 + 4) > 0, \\ x < 1, \\ x > -3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ x > -3, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Ответ: $x \in]0; 1[$.

Рассмотрим уравнение $|f(x)| = g(x)$. По определению модуля имеем

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ -f(x) = g(x), \end{cases} \end{array}\right. \overset{(Б)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = -g(x), \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = \pm g(x). \end{cases}$$

Объясните переход (Б)! Таким образом, мы получаем еще одну схему равносильного перехода, которая во многих задачах представляется проще.

Пример 6. Найти все корни уравнения $2|x^2+2x-5| = x-1$, удовлетворяющие неравенству $x < \sqrt{2}$.

Решение. Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то следствием его будет $x-1 \geqslant 0$, поэтому исходная задача равносильна системе

$$(1) \begin{cases} 2|x^2 + 2x - 5| = x - 1 \\ x - 1 \geqslant 0 \\ x < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 + 2x - 5) = \pm(x - 1), & (2) \\ 1 \leqslant x < \sqrt{2}. & (3) \end{cases}$$

Решим совокупность (2):

$$2x^2 + 4x - 10 = x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{3}{2}, & (4) \\ x = -3; & (5) \end{array}\right.$$

$$-2x^2 - 4x + 10 = x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{-5 + \sqrt{113}}{4}, & (6) \\ x = \frac{-5 - \sqrt{113}}{4}. & (7) \end{array}\right.$$

Итак, совокупность (2) имеет четыре корня (4)—(7), из которых корни (5) и (7) отрицательны и, значит, не удовлетворяют условию (3). Остается проверить выполнение условия (3)

для корней (4) и (6). Пусть $x=\frac{3}{2}$. Очевидно, что $\frac{3}{2}>1$. Поскольку $\frac{3}{2}>0$ и $\sqrt{2}>0$, то между ними такое же неравенство, как и между их квадратами (пользуемся тем, что x^2 возрастает на луче $[0;+\infty[$, т. е. тем, что при $a, b\geqslant 0$ $(a>b)\Leftrightarrow(a^2>b^2)$). Далее, так как $(\sqrt{2})^2=2<\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$, то $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$; следовательно, $x=\frac{3}{2}$ не удовлетворяет условию (3). Пусть $x=\frac{\sqrt{113}-5}{4}$. Совершенно аналогично проверяем

$$\frac{\sqrt{113}}{4}-\frac{5}{4}\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{113}}{4}>\frac{9}{4}\Leftrightarrow\sqrt{113}\geqslant 9\Leftrightarrow 113\geqslant 81$$ —

верное неравенство.

$$\sqrt{113}-\frac{5}{4}<\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{113}<4\sqrt{2}+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 113<32+40\sqrt{2}+25\Leftrightarrow 56<40\sqrt{2}\Leftrightarrow 7<5\sqrt{2}\Leftrightarrow 49<50$$

— верное неравенство; следовательно, корень (6) удовлетворяет условию (3).

Ответ: $x=\frac{\sqrt{113}-5}{4}$.

4. Иррациональные уравнения и неравенства

Стандартные приемы решения иррациональных уравнений и неравенств частично уже разбирались в разделе 1 этого параграфа. Рассмотрим еще одну схему равносильного перехода, позволяющую решать неравенства вида $\sqrt{f(x)}\leqslant g(x)$. Для этого заметим, что так как квадратный корень неотрицателен, то $0\leqslant\sqrt{f}\leqslant g\Rightarrow g\geqslant 0$. Поскольку $g(x)\geqslant 0$ является следствием исходного неравенства, мы можем приписать это условие, получив равносильную систему:

$$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{f(x)}\leqslant g(x),\\ g(x)\geqslant 0\end{cases}$$

(см. лемму из раздела 1 этого параграфа). Далее, на луче $[0;+\infty[$ функция x^2 — возрастающая, поэтому, применив ее к обеим частям неравенства $\sqrt{f}\leqslant g$ (учитывая, что $\sqrt{f}\geqslant 0$

и $g \geqslant 0$), получим:

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} \leqslant g(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{f}(x))^2 \leqslant g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство — результат подстановки $(\sqrt{f})^2 \xrightarrow{f \geqslant 0} f$.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x^2} \leqslant 1-x. \tag{1}$$

Решение. Согласно указанной выше схеме

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \leqslant (1-x)^2, \\ 1-x \geqslant 0, \\ 1-x^2 \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \leqslant 1-2x+x^2, \\ x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x \geqslant 0, & (4) \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, & (3) \end{cases}$$

поскольку неравенство (2) — следствие неравенства (3).

Далее, $\begin{cases} (4) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 0, \end{array}\right. \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

или $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ или $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

Ответ: $x \in \{1\} \cup [-1; 0]$.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geqslant 0. \tag{1}$$

Решение. Произведение неотрицательно, когда либо оба сомножителя неотрицательны, либо оба неположительны, т. е.

$$(1) \Leftrightarrow (S_1) \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ \sqrt{-x^2+x+6} \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } (S_2) \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ \sqrt{-x^2+x+6} \leqslant 0. \end{cases}$$

Некоторые абитуриенты совершают ошибку, не рассматривая систему (S_2), «поскольку квадратный корень неотрицателен». Однако *неотрицательность не исключает неположительности.* Действительно, поскольку квадратный корень неотрицателен, то

$$\sqrt{-x^2+x+6} \leqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+x+6} = 0.$$

Таким образом, получаем:

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ \sqrt{-x^2+x+6}=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ -x^2+x+6=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-2;$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ -x^2+x+6 \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ -2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Ответ: $x \in \{-2\} \cup [1, 3]$.

Иногда удобно свести решение иррационального уравнения к системе рациональных уравнений.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1. \qquad (1)$$

Решение. Обозначим

$$\sqrt[3]{x+45} = u, \quad \sqrt[3]{x-16} = v,$$

тогда в силу (1) получаем $u-v=1$. Однако одного такого соотношения мало для решения. Заметим, что $x+45=u^3$ и $x-16=v^3$; эти соотношения позволяют исключить x:

$$u^3-v^3=45+16=61.$$

В итоге получаем эквивалентную уравнению (1) задачу: решить систему

$$(S_1) \begin{cases} u^3-v^3=61, \\ u-v=1. \end{cases}$$

Решим систему (S_1):

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2+uv+v^2)=61, \\ u=v+1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (v+1)^2+(v+1)v+v^2=61, & (2) \\ u=v+1. & (3) \end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$(2) \Leftrightarrow 3v^2+3v+1-61=$$

$$=0 \Leftrightarrow v^2+v-20=0 \Leftrightarrow v=4 \text{ или } v=-5.$$

Таким образом,

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} v=4, \\ u=5, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v=-5, \\ u=-4, \end{cases}$$

откуда получаем, что исходное уравнение (1) равносильно совокупности систем:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-16=4^3, \\ x+45=5^3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-16=(-5)^3, \\ x+45=(-4)^3, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=80, \\ x=-109. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=80$ или $x=-109$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x-1}+x-3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}. \qquad (1)$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-1}=u$ и $x-3=v$, тогда исходное неравенство примет вид

$$u+v \geqslant \sqrt{2u^2+2v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geqslant 0, \\ u^2+2uv+v^2 \geqslant 2u^2+2v^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geqslant 0, \\ u^2-2uv+v^2 \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geqslant 0, \\ (u-v)^2 \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geqslant 0, \\ (u-v)^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geqslant 0, \\ u=v. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}=x-3, \\ x-3 \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=(x-3)^2, \\ x-3 \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10=0, \\ x \geqslant 3, \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: $x=5$.

5. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

Прежде чем читать этот раздел, необходимо вспомнить определения показательной и логарифмической функции. Часто ошибка состоит в том, что выражения вида $a^{\log_a f(x)}$ при $0<a\neq 1$ заменяются на $f(x)$: тождество, определяющее $\log_a y$ как обратную функцию к a^x, т. е.

$$a^{\log_a y}=y$$

справедливо только для y из области значения функции a^x, т. е. для $y>0$! Поэтому схему подстановки можно записать так:

$$a^{\log_a f(x)} \xrightarrow[f(x)>0]{} f(x), \qquad (D)$$

т. е. при замене выражения $a^{\log_a f(x)}$ на $f(x)$ требуется добавлять неравенство $f(x)>0$.

Пример 1. Решить уравнение

$$3^{-\frac{1}{2}}+6^{-\frac{1}{2}+\log_6 \sin x}=2^{-\frac{1}{2}+\log_2 \cos x}. \qquad (1)$$

Решение. Очевидно,

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 6^{\log_6 \sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^{\log_2 \cos x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot \sin x=\dfrac{1}{2}\cos x, & (2)\\ \sin x>0, & (3)\\ \cos x>0. & (4)\end{cases}$$

Решим уравнение (2). Умножим обе части на $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$:

$$(2)\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x-$$

$$-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)+n\pi,$$

$$n\in\mathbf{Z},\Leftrightarrow x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

При n — четных, т. е. при $n=2k$, имеем $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=$ $=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ — углы, лежащие в I четверти и поэтому удовлетворяющие условиям (3)—(4). При n — нечетных, т. е. при $n=2k+1$, имеем $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi=$ $=\pi+\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ — углы, лежащие в IV четверти, т. е. не удовлетворяющие условию (3).

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

Отметим, что из схемы (D) вытекает следующая схема равносильного перехода:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ g(x)>0\end{cases}$$

(нужно приписывать к уравнению $f(x)=g(x)$ то из неравенств $f(x)>0$ или $g(x)>0$, которое проще). Действительно, поскольку a — основание логарифма, то $0<a\neq 1$; значит, функция a^y — монотонна. Отсюда, как уже отмечалось выше, следует, что $y_1 = y_2 \Leftrightarrow a^{y_1} = a^{y_2}$.
Взяв $y_1=\log_a f(x)$ и $y_2=\log_a g(x)$, получим

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^{\log_a g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(при последнем переходе использовалась схема (D)). Остается заметить, что из уравнения $f(x)=g(x)$ и любого из неравенств $f(x)>0$ или $g(x)>0$ следует другое неравенство, т. е. его можно исключить из системы.

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_{2x}\left(\frac{32}{x} - 16x\right) = \frac{1}{\log_{56}(2x)} - 3. \qquad (1)$$

Решение. Перейдем в правой части к тому же основанию, что и в левой, т. е. к $2x$:

$$1) \Leftrightarrow \log_{2x}\left(\frac{32}{x} - 16x\right) = \log_{2x} 56 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x}\left(\frac{32}{x} - 16x\right) = \log_{2x}\frac{56}{(2x)^3}. \qquad (2)$$

Здесь нужно проявить аккуратность, а именно, поскольку основание логарифма — величина переменная, то применять непосредственно схему (D) нельзя. Можно перейти к основанию, например, 10:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\lg\left(\frac{32}{x} - 16x\right)}{\lg(2x)} = \frac{\lg\frac{56}{(2x)^3}}{\lg(2x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg\left(\frac{32}{x} - 16x\right) = \lg\frac{7}{x^3}, \\ \lg(2x) \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{32}{x} - 16x = \frac{7}{x^3}, \\ 0 < 2x \neq 1, \\ \frac{7}{x^3} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32x^2 - 16x^4 - 7 = 0, \\ 0 < x \neq \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^4 - 32x^2 + 7 = 0, & (3) \\ 0 < x \neq \frac{1}{2}. & (4) \end{cases}$$

Решим уравнение (3):

$$x^2 = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4\cdot 16\cdot 7}}{32} = \frac{32 \pm \sqrt{8^2(16-7)}}{32} =$$

$$= \frac{4 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{7}{4}, \\ x^2 = \frac{1}{4}, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\sqrt{7}}{2} & \text{(не удовлетворяет условию (4))}, \\ x = \frac{\sqrt{7}}{2} & \text{(удовлетворяет (4))}, \\ x = -\frac{1}{2} & \text{(не удовлетворяет (4))}, \\ x = \frac{1}{2} & \text{(не удовлетворяет (4))}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$4^{\sqrt{9-x^2}+1} + 2 < 2^{\sqrt{9-x^2}} \cdot 9. \qquad (1)$$

Решение. Обозначим $y = 2^{\sqrt{9-x^2}}$, тогда

$$4^{\sqrt{9-x^2}} = (2^2)^{\sqrt{9-x^2}} = 2^{2\sqrt{9-x^2}} = (2^{\sqrt{9-x^2}})^2 = y^2,$$

откуда получаем

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4y^2 + 2 < 9y, \\ y = 2^{\sqrt{9-x^2}}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4y^2 - 9y + 2 < 0, \\ y = 2^{\sqrt{9-x^2}}, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4} < y < 2, \\ y = 2^{\sqrt{9-x^2}}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2^{\sqrt{9-x^2}} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{4} < \sqrt{9-x^2} < \log_2 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \sqrt{9-x^2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} < 1. \qquad (2)$$

В последнем переходе мы использовали то, что $\sqrt{f(x)} \geqslant 0 > -2$. Далее,

$$(2) \Leftrightarrow 0 \leqslant 9 - x^2 < 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 \leqslant 9, \\ x^2 > 8, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2\sqrt{2}, \\ x < -2\sqrt{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \leqslant x < -2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt{2} < x \leqslant 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = [-3; -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}; 3]$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2. \qquad (1)$$

Решение. В этой задаче самое главное — заметить, что $6x^2-5x+1=(1-2x)(1-3x)$ и $4x^2-4x+1=(1-2x)^2$.

И далее:

$$(1)\Leftrightarrow \log_{1-2x}[(1-2x)(1-3x)]\log_{1-3x}(1-2x)^2=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{1-2x}(1-2x)+\log_{1-2x}(1-3x)-2\log_{1-3x}(1-2x)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\log_{1-3x}(1-2x)}-2\log_{1-3x}(1-2x)=2. \qquad (2)$$

В уравнении (2) делаем замену $y=\log_{1-3x}(1-2x)$, тогда это уравнение запишется в виде

$$1+\frac{1}{y}-2y=2\Leftrightarrow \frac{2y^2+y-1}{y}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2+y-1=0, \\ y\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{1-3x}(1-2x)=-1, \\ \log_{1-3x}(1-2x)=\frac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1-2x=\frac{1}{1-3x}, \\ 1-2x=\sqrt{1-3x}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \\ 1-3x>0, \\ 1-3x\neq 1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_1)\begin{cases} 6x^2-5x+1=1, \\ 1-3x>0, \\ 1-3x\neq 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad (S_2)\begin{cases} (1-2x)^2=1-3x, \\ 1-2x>0, \\ 1-3x\neq 1, \end{cases}$$

$$(S_1)\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-5x=0, \\ 3x<1, \\ x\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{6}, \\ x=0, \end{array}\right. \\ x<\frac{1}{3}, \\ x\neq 0, \end{cases}$$ (система не имеет решений)

$$(S_2)\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-x=0, \\ 1-2x>0, \\ x\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}, \\ x=0, \end{array}\right. \\ x<\frac{1}{2}, \\ x\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{\log_2 (x^2-2x-7)^5 - \log_3 (x^2-2x-7)^8}{3x^2-13x+4} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Решение. В числителе перейдем к основанию, например, 2; тогда

$$\log_2 (x^2-2x-7)^5 - \log_3 (x^2-2x-7)^8 =$$

$$= 5\log_2 (x^2-2x-7) - \frac{8}{\log_2 3}\cdot \log_2 (x^2-2x-7) =$$

$$= \left(5 - \frac{8}{\log_2 3}\right)\cdot \log_2 (x^2-2x-7). \qquad (2)$$

Прежде чем решать неравенство (1), очевидно, следует выяснить знак множителя $5 - \frac{8}{\log_2 3}$ в выражении (2) в числителе дроби:

$$5 - \frac{8}{\log_2 3} = 5 - 8\log_3 2 = \log_3 3^5 - \log_3 2^8 =$$

$$= \log_3 \frac{3^5}{2^8} = \log_3 \frac{243}{256} < \log_3 1 = 0.$$

Теперь получаем

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(5 - \frac{8}{\log_2 3}\right)\log_2 (x^2-2x-7)}{3x^2-13x+4} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 (x^2-2x-7)}{3x^2-13x+4} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (S_1)\begin{cases} \log_2 (x^2-2x-7) \geqslant 0, \\ 3x^2-13x+4 > 0, \end{cases} \text{ или } (S_2)\begin{cases} \log_2 (x^2-2x-7) \leqslant 0, \\ 3x^2-13x+4 < 0. \end{cases}$$

Решаем отдельно каждую из систем:

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-7 \geqslant 1, \\ 3x^2-13x+4 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 4, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x < \frac{1}{3}, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x > 4; \end{array}\right.$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2-2x-7 \leqslant 1, \\ 3x^2-13x+4 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1+2\sqrt{2}, \\ x < 1-2\sqrt{2}, \end{array}\right. \\ -2 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dfrac{1}{3} < x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (S_3)\begin{cases} x < 1-2\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{3} < x < 4, \end{cases} \text{ или } (S_4)\begin{cases} x > 1+2\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{3} < x < 4. \end{cases}$$

Система (S_3) противоречива, так как $1-2\sqrt{2} < 0 < \frac{1}{3}$; поскольку $\frac{1}{3} < 1+2\sqrt{2} < 4$, то $(S_2) \Leftrightarrow (S_4) \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2} < x < 4$.

Ответ: $x \in]-\infty; -2] \cup]1+2\sqrt{2}, 4[\cup]4, \infty[$.

§ 3. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Отыскание целочисленных решений уравнений, неравенств и систем имеет свои особенности. Условие целочисленности зачастую может существенно упростить задачу; очень часто целочисленные задачи сводят к перебору небольшого числа вариантов. Прежде чем разбирать задачи, напомним несколько определений и простых утверждений из школьного курса.

1. *«Разделить целое число a на целое число b»* означает *найти такие целые числа q и r, что*

$$a = bq + r, \text{ причем } 0 \leqslant r < |b|.$$

При этом q называется *неполным частным*, а r — *остатком*. Примеры. Запишем в виде таблички:

Делимое	Делитель	(Неполное) частное	Остаток
3	2	1	1
—3	2	—2	1
7	8	0	7
—2	3	—1	1
—4	—3	2	2

2. Говорят «a делится (нацело) на b» или «b — делит a», если остаток от деления a на b равен нулю; это символически записывают так: $a \vdots b$ или $b \mid a$.

3. Целое число d называется *общим делителем* a и b, если d делит a и делит b.

Наибольший из всех общих делителей называется *наибольшим общим делителем* a и b и обозначается $d=(a, b)$ или $d=\mathrm{HOD}(a, b)$.

4. Числа a и b *взаимно просты*, если $(a, b)=1$.

5. Если $(a\cdot b) \vdots c$ и $(a, c)=1$, то $b \vdots c$.

6. Натуральное число $p>1$ называется *простым*, если оно не имеет натуральных делителей, кроме 1 и себя.

Разберем несколько примеров.

Пример 1. Доказать, что $\sqrt{7}$ — иррациональное число.

Решение. Предположим, что это не так, т. е. что $\sqrt{7}=p/q$, где p, q — целые числа. Мы можем считать, что дробь p/q — несократимая, т. е. $(p, q)=1$. В противном случае поделим числитель и знаменатель на их наибольший общий делитель, получим несократимую дробь. Очевидно, что

$$\sqrt{7}=\frac{p}{q} \Rightarrow p^2=7q^2. \qquad (1)$$

Правая часть (1) делится на 7, значит, и левая делится на 7, но тогда

$$p^2 \vdots 7 \Leftrightarrow p\cdot p \vdots 7 \Rightarrow p \vdots 7,$$

что следует из п. 5 и простоты числа 7.

Если $p \vdots 7$, то $p=7k$, подставляя это выражение в (1), получаем, как и выше:

$$7^2k^2=7q^2 \Rightarrow 7k^2=q^2 \Rightarrow q^2 \vdots 7 \Rightarrow q \vdots 7.$$

Итак, $p \vdots 7$ и $q \vdots 7$, что противоречит несократимости дроби p/q. Следовательно, $\sqrt{7}$ не может быть рациональным числом, значит, оно — иррациональное.

Пример 2. Доказать, что если p и q — целые числа, причем

$$p^2-7q^2=2pq, \qquad (1)$$

то $p=q=0$.

Доказательство. Перепишем уравнение (1) в виде

$$p^2-2pq+q^2=8q^2, \text{ т. е. } (p-q)^2=2(2q)^2. \qquad (2)$$

Если $2q=0$, то $p-q=0$ и, значит, $p=q=0$. Если $2q\neq 0$, то уравнение (2) равносильно уравнению

$$\left(\frac{p-q}{2q}\right)^2=2, \text{ т. е. } \left|\frac{p-q}{2q}\right|=\sqrt{2}. \qquad (3)$$

В последнем равенстве слева стоит рациональное число, а справа иррациональное, т. е. равенство (3) не может иметь места; значит, единственным решением (1) является $p=q=0$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2-1)(n^2-11)(n^2-101)(n^2-1001)<0. \qquad (1)$$

Решение. Применив метод интервалов для $n^2(\geqslant 0)$, мы видим, что неравенство (1) равносильно совокупности

$$\begin{cases} 1<n^2<11, \\ 101<n^2<1001. \end{cases} \qquad (2)$$

Из первого неравенства совокупности (2) получаем $n^2=4$ или $n^2=9$, т. е. $n=\pm 2,\ \pm 3$. Из второго неравенства получаем $\sqrt{101}<|n|<\sqrt{1001}$, т. е. $11\leqslant|n|\leqslant 31$, ибо $10<\sqrt{101}<11$ и $31<\sqrt{1001}<32$.

Ответ: $n=\pm 2,\ \pm 3,\ \pm 11,\ \pm 12,\ \ldots,\ \pm 30,\ \pm 31$ (всего 46).

Пример 4. Найти все целые решения неравенства

$$2x+1<2\log_2(x+3). \qquad (1)$$

Решение. Область определения правой части — множество $x>-3$. Рассмотрим функцию $f(x)=2x+1-2\log_2(x+3)$; в задаче требуется найти все целые числа, такие, что $f(x)<0$. Вычислив производную $f'(x)=2-\frac{2}{(x+3)\ln 2}$, мы видим, что по крайней мере для $x\geqslant -1$ производная положительна, т. е. $f(x)$ — возрастающая функция. Это означает, что если в какой-нибудь точке $x_0\geqslant -1$ будет выполнено неравенство $f(x_0)>0$, то при любом $x\geqslant x_0$ выполняется неравенство $f(x)\geqslant f(x_0)>0$, т. е. правее x_0 уже не может быть решений неравенства (1). Теперь, последовательно подставляя целые числа $x>-3$, попробуем найти какое-нибудь такое число x_0:

$$f(-2)=-4+1-2\log_2(-2+3)=-3<0,$$

$$f(-1)=-2+1-2\log_2(-1+3)=-3<0,$$

$$f(0)=1-2\log_2 3=1-\log_2 9=\log_2\frac{2}{9}<0,$$

$$f(1)=2+1-2\log_2(1+3)=-1<0,$$

$$f(2)=4+1-2\log_2(2+3)=5-\log_2 25=\log_2\frac{32}{25}>0.$$

Отсюда видно, что в качестве x_0 можно взять 2.

Итак, при $x\geqslant 2$ неравенство (1) не выполняется; числа же $-2, -1, 0, 1$ удовлетворяют неравенству.

Ответ: $\{-2, -1, 0, 1\}$.

Пример 5. В буфете продавались пирожки по 5 коп. штука, бублики — по 6 коп., булки — по 7 коп., слойки — по 8 коп. и коржики — по 10 коп.

Группа ребят купила на 1 р. 14 изделий разных типов. Сумма цен всех типов купленных изделий равна 21 коп. Сколько каких изделий было куплено, если известно, что никаких изделий не было куплено более 7 и никаких не было куплено поровну?

Решение. Обозначим количество купленных пирожков через x, бубликов — y, булок — z, слоек — u и коржиков v. Согласно условию задачи сумма цен всех типов купленных изделий равна 21. Это означает, что этих типов не более трех (ибо сумма цен четырех самых дешевых изделий равна $5+6+7+8=26>21$) и не менее трех (ибо сумма цен двух самых дорогих типов равна $8+10=18<21$), т. е. куплены изделия трех типов.

Перебрав возможные тройки (проделайте это!), мы видим, что есть только два возможных случая

$$5+6+10=21 \text{ или } 6+7+8=21,$$

т. е. либо $z=u=0$, либо $x=v=0$.

В первом случае имеем по условию задачи:

$$x+y+v=14;\ 1\leqslant x\leqslant 7;\ 1\leqslant y\leqslant 7;\ 1\leqslant v\leqslant 7;$$
$$5x+6y+10v=100;\ x\neq y;\ x\neq v;\ y\neq v.$$

Умножая первое уравнение на (-5) и складывая его со вторым, получаем $y+5v=30$, откуда $y=30-5v$, и мы видим, что $y\,\vdots\,5$, т. е. $y=5k$, где k — целое.

Из неравенства $1\leqslant y\leqslant 7$ следует, что $1\leqslant 5k\leqslant 7$, т. е. $k=1$. В таком случае $y=5$ и, значит, $v=5$; последнее противоречит условию $y\neq v$. Следовательно, в первом случае решений нет.

Во втором случае ($x=v=0$) по условию задачи имеем:

$$y+z+u=14;\ 1\leqslant y\leqslant 7;\ 1\leqslant z\leqslant 7;\ 1\leqslant u\leqslant 7;$$
$$6y+7z+8u=100;\ y\neq z;\ z\neq u;\ y\neq u.$$

Умножая первое уравнение на (-6) и складывая его со вторым, получаем

$$z+2u=16, \qquad (1)$$

откуда видно, что z — четное число, т. е. z может равняться ($1\leqslant z\leqslant 7$) числам 2, 4, 6; при этом u принимает значения 7, 6 и 5 соответственно. Из первого уравнения получаем значения $y=5$, 4 и 3 соответственно.

Выпишем все решения в виде троек

$$(y;\ z;\ u)\in\{(5;\ 2;\ 7),\ (4;\ 4;\ 6),\ (3;\ 6;\ 5)\}.$$

Вторая тройка не удовлетворяет условию $y\neq z$ (ибо в ней $y=z=4$). Проверкой убеждаемся (проделайте подробно!), что две оставшиеся тройки — решения задачи.

Ответ: Существуют два решения:

1) 5 бубликов, 2 булки, 7 слоек;
2) 3 бублика, 6 булок, 5 слоек.

Пример 6. Квадрат натурального числа N, увеличенный на два, делится без остатка на неполное частное от деления N на 4 и дает в результате 201. Найти N.

Решение. Итак, из условия видно, что $N=4k+r$, причем остаток r обязательно больше нуля (ибо сказано, что k — неполное частное), т. е. $0<r<4$. Кроме того, дано, что

$$N^2+2=k\cdot 201. \qquad (1)$$

Подставляя в уравнение (1) $N=4k+r$ и приведя подобные, получаем

$$16k^2+(8r-201)k+r^2+2=0, \qquad (2)$$

откуда

$$k_{1,2}=\frac{201-8r\pm\sqrt{40273-3216r}}{32}. \qquad (3)$$

В формулах (3) выражение под радикалом должно быть равно квадрату натурального числа. Подставляя $r=1$, 2, 3 (ибо $0<r<4$), убеждаемся, что этому условию удовлетворяет только $r=3$. Действительно, при $r=1$ число 37 057 оканчивается на 7, но никакое число в квадрате не может оканчиваться на 7. При $r=2$, если $x^2=33841$, то число x должно кончаться в десятичной записи либо на 1, либо на 9 и, кроме того, $180<x<190$; такие числа только 181 и 189, но их квадраты не равны 33841 (можно также вычислить ближайшие целые числа a и b, такие, что $a<x<b$ и $b-a=1$; в нашем случае $183<x<184$). Наконец, при $r=3$ имеем

$$k_{1,2}=\frac{177\pm 175}{32}$$

и, учитывая, что k — целое, получаем $k=11$. Итак, $N=4k+r$, где $k=11$ и $r=3$, т. е. $N=47$.

Ответ: $N=47$.

Пример 7. Из лесного хозяйства в город нужно вывезти 1590 деревьев. Для перевозки деревьев имеются полуторатонки, трехтонки и пятитонки. На полуторатонке можно перевезти за один раз 26 деревьев, на трехтонке — 45 деревьев, на пятитонке — 75 деревьев. Стоимость одного пробега для полуторатонки равна 9 р., для трехтонки — 15 р., для пятитонки 24 р. Как лесное хозяйство должно распределить перевозки, чтобы их общая стоимость была наименьшей? Недогрузка машин не допускается.

Решение. Обозначив x — количество пробегов всех полуторатонок, y — трехтонок, z — пятитонок, имеем $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ и

$$26x+45y+75z=1590. \qquad (1)$$

Нам нужно минимизировать стоимость S:

$$S=9x+15y+24z. \qquad (2)$$

Сразу же заметим, что

$$3S=26x+45y+75z+x-3z=1590+x-3z; \qquad (3)$$

отсюда видно, что z нужно брать по возможности бо́льшим, а x поменьше.

Рассмотрим самый простой из таких случаев: поскольку $x\geqslant 0$, то наименьшим возможным значением x является $x=0$. При этом уравнение (1) имеет вид

$$45y+75z=1590, \text{ т. е. } 3y+5z=106. \qquad (1а)$$

Отсюда видно, что наибольшее из возможных значений z равно 21. Но при $z=21$ получается $3y=1$ — уравнение, не имеющее решения в целых числах.

Итак, при $x=0$ число $z\neq 21$. Таким образом, нужно либо уменьшать z, либо увеличить x. Из формулы (3) на первый взгляд может показаться, что выгоднее увеличить на 1 или на 2 переменную x, чем уменьшить на 1 переменную z. Однако это далеко не так, ибо из уравнения (1) следует, что x делится нацело на 15:

$$\begin{cases} 26x=1590-45y-75z \vdots 15, \\ \text{НОД}\,(26,15)=1, \end{cases} \Rightarrow x \vdots 15.$$

Таким образом, $x=15\cdot k$ ($k=0, 1, \ldots$), и ближайшим возможным значением x после $x=0$ является $x=15$. Из формулы (3) теперь видно, что следующий случай, который следует рассмотреть, это $x=0$, $z=20$. В этом случае из уравнения (1а), которое получается из (1) при $x=0$, следует, что $y=2$. В оставшихся возможных случаях либо $x>0$, либо $z<20$ и поэтому (см. формулу (3)) они требуют больших затрат. Следовательно, решением будет тройка $(x, y, z)=(0, 2, 20)$. При этом $3S=1590+0-3\cdot 20=1530$ или $S=510$.

Ответ: Нужны 2 трехтонки и 20 пятитонок; стоимость перевозок равна 510 р.

Замечание. Интересно отметить, что если разрешить недогрузку машин, не меняя стоимость пробега, то решение (усложненное, конечно) приведет к тому же ответу. Если же при этом число деревьев увеличить хотя бы на 1 (более общее, не более чем на одиннадцать), то решение изменится: $x=1$, $y=0$, $z=21$ и $S=513$.

Пример 8. Бригады, состоящие из одинакового числа рабочих, получили на складе спецодежду. Каждый рабочий получил по два комплекта спецодежды, а каждой бригаде выдали на 20 комплектов больше, чем было бригад. Если бы

бригад было на 4 больше и каждой бригаде выдали бы по 12 комплектов, то спецодежды на складе не хватило бы. Сколько комплектов спецодежды было на складе?

Решение. Пусть n — количество рабочих в одной бригаде, m — количество бригад и k — количество комплектов спецодежды на складе. Общее количество рабочих равно $n \cdot m$, по условию задачи имеем:

$$2nm = (m+20)\,m \leqslant k, \qquad (1)$$

т. е. количество комплектов выданной спецодежды не превосходит количества комплектов на складе. Во втором случае имеем

$$12(m+4) > k. \qquad (2)$$

Требуется найти k. Заметим, что из (1)—(2) следует

$$12(m+4) > (m+20)\,m, \text{ т. е. } m^2+8m-48<0, \qquad (3)$$

если теперь вспомнить, что m — натуральное число, то станет понятен дальнейший ход решения: неравенство (3) имеет небольшое количество натуральных решений, подставляя которые в (1)—(2), найдем все решения. Итак, решая квадратное неравенство (3), получаем $-12<m<4$; но так как m — натуральное число, то m может принимать всего три значения: 1, 2, 3. Подставляя эти значения в уравнение $2nm=(m+20)\,m$, мы видим, что только при $m=2$ число n будет натуральным.

Поскольку $(m+20)\,m \leqslant k < 12(m+4)$ и $m=2$, то $44 \leqslant k < 72$.

Ответ: Количество комплектов спецодежды может быть любым натуральным числом от 44 до 71 включительно.

Пример 9. При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5 до 93,5%. Определить минимально возможное число членов этой бригады.

Решение. Пусть n — количество членов бригады, m — количество членов бригады, не перевыполнивших план. Заметим сразу, что $m>0$, так как иначе перевыполнивших план было бы 100%. Итак, по условию задачи m, n — натуральные числа, причем

$$92{,}5 \leqslant \frac{n-m}{n} \cdot 100 \leqslant 93{,}5. \qquad (1)$$

Обратим внимание на то, что в задаче не сказано точно, какого типа неравенства (1) — строгие или нестрогие. В тех случаях, когда это может повлиять на результат, следует обращаться за разъяснением к экзаменаторам. В данной задаче это не влияет на результат.

Итак, преобразуем двойное неравенство (1):

$$(1) \Leftrightarrow 0{,}925\,n \leqslant n-m \leqslant 0{,}935n \Leftrightarrow 0{,}065n \leqslant m \leqslant 0{,}075n. \qquad (2)$$

Теперь задачу можно переформулировать так: при каком наименьшем натуральном n в промежуток $[0{,}065n;\ 0{,}075n]$ попадает хотя бы одно натуральное число. Наименьшее натуральное число — единица, поэтому правый конец промежутка должен быть правее единицы:

$$0{,}075n \geqslant 1 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1000}{75} = 13 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \geqslant 14.$$

Таким образом, n не может быть меньше 14. Проверим, выполняется ли наше условие при $n=14$: $0{,}065 \cdot 14 = 0{,}87 < 1 < 0{,}075 \cdot 14 = 1{,}05$, т. е. $n=14$ удовлетворяет нашему неравенству (2) и ни при каком $n<14$ это неравенство не выполняется.

Ответ: 14.

Замечание. Левый конец мог оказаться таким, что $n=14$ не подошло бы, например, если бы неравенство (2) выглядело так:

$$0{,}072n \leqslant m \leqslant 0{,}075n,$$

т. е. при $n=14$ левый конец $0{,}072 \cdot 14 = 1{,}008 > 1$. В таком случае нужно понимать, что, увеличивая n, мы увеличиваем и длину промежутка $[0{,}072n;\ 0{,}075n]$, поэтому при каком-нибудь n в него попадет хотя бы одно натуральное число (по крайней мере, когда длина его станет не меньше единицы). Поэтому, последовательно увеличивая n, мы найдем такое наименьшее значение. Проще, однако, искать его, увеличивая последовательно m; для этого перепишем неравенство (3) в виде

$$\frac{1000m}{75} \leqslant n \leqslant \frac{1000m}{72} \Leftrightarrow \left(13 + \frac{1}{3}\right) m \leqslant n \leqslant \left(13 + \frac{8}{9}\right) m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{3} \leqslant n - 13m \leqslant \frac{8m}{9}.$$

Отсюда видно, что при $m=2$ число $n-26$ заключено в промежутке $\left[\frac{2}{3},\ 1 + \frac{7}{9}\right]$, содержащем 1, т. е. $n-26=1 \Leftrightarrow n=27$.

Пример 10. Найти все целые положительные решения уравнения

$$3x^2+3xy+2x-y=56. \qquad (1)$$

Решение. Уравнение (1) — квадратное по x:

$$(1) \Leftrightarrow 3x^2+(3y+2)x-y-56=0.$$

Его решения при целых y могут быть целыми, только если дискриминант $D=9y^2+24y+676$ является квадратом целого

числа:

$$D=(3y+4)^2+660=n^2\Leftrightarrow n^2-(3y+4)^2=660\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (n+3y+4)\,(n-3y-4)=660. \qquad (2)$$

Мы можем считать, что n — натуральное число, поскольку $n\neq 0$; y — натуральное число по условию задачи, поэтому $n+3y+4>n-3y-4$. Уравнение (2) показывает, что $n+3y+4$ и $n-3y-4$ являются делителями $660=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$.

Поскольку $660=330\cdot 2=220\cdot 3=165\cdot 4=132\cdot 5=110\cdot 6=66\cdot 10=60\cdot 11=55\cdot 12=44\cdot 15=33\cdot 20$, то можно было бы рассмотреть все 10 случаев, когда $n+3y+4$ равно первому (большему) сомножителю, а $n-3y-4$ меньшему. Однако этот перебор можно сократить до трех вариантов, если заметить, что оба сомножителя в (2) одной четности и, значит, оба четны. Действительно, сложив оба выражения в скобках, получим $2n$ — четное число, что может быть только, когда либо оба нечетны, либо оба четны. Далее, оба сомножителя не могут быть нечетными, так как произведение их равно четному числу 660. В результате получаем следующие варианты:

$$\begin{cases} n+3y+4=330, \\ n-3y-4=2, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n=166, \\ 3y=160 \end{cases}$$ (не имеет целых решений);

$$\begin{cases} n+3y+4=110, \\ n-3y-4=6, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n=58, \\ y=16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n+3y+4=66, \\ n-3y-4=10, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n=38, \\ y=8. \end{cases}$$

Далее, квадратное уравнение (1) имеет решения $x=\dfrac{-(3y+2)\pm n}{6}$, поэтому: при $y=16$, $n=58$ получаем $x=\dfrac{4}{3}$ (не целое) или $x=-18<0$; при $y=8$, $n=38$ получаем $x=2$ или $x=-\dfrac{32}{3}<0$.

Таким образом, натуральным решением будет пара $(x;\ y)=(2;\ 8)$.

Ответ: $(x;\ y)=(2;\ 8)$.

Пример 11. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла ровно 95% производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки ровно на 23% от числа машин, производимых в сутки на первом заводе, и стал выпускать их более 1000 штук. Сколько автомобилей в сутки выпускал каждый завод до реконструкции?

Решение. Пусть первый завод производил до реконструкции n машин в сутки, а второй — m машин в сутки, тогда по условию задачи имеем

$$n \leqslant 950 \text{ и } m = \frac{95}{100} n = \frac{19}{20} n. \quad (1)$$

Пусть после реконструкции второго завода количество выпускаемых в сутки автомобилей стало равно p, тогда по условию задачи

$$1000 < p \text{ и } p = n + \frac{23}{100} n = \frac{123}{100} n. \quad (2)$$

Теперь заметим, что поскольку m и p — натуральные числа, то n должно делиться на 20 и на 100 соответственно. Поскольку если n делится на 100, то обязательно делится и на 20, получаем $n : 100$, т. е. $n=100k$. Теперь неравенства условий (1)—(2) можно записать так:

$$\begin{cases} 100k \leqslant 950 \\ 123k > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow 9{,}5 \geqslant k > \frac{1000}{123} = 8 + \frac{16}{123}.$$

В промежутке $\left]8 + \frac{16}{123};\ 9{,}5\right]$ имеется единственное натуральное $k=9$. Таким образом, $n=100k=900$,

$$m = \frac{19}{20} n = 855.$$

Ответ: Производительность первого завода 900 автомобилей в сутки, второго — 855.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Прежде чем читать этот параграф, следует вспомнить основные свойства неравенств. Перечислим их. Пусть a, b, c — действительные числа, тогда:

1. $a>b \Leftrightarrow b<a$;
2. $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$;
3. если $c>0$, то $a>b \Leftrightarrow ac>bc$;
4. $a>b$ и $b>c \Rightarrow a>c$ (транзитивность).

Мы настолько привыкли к этим свойствам, что зачастую применяем их, даже не отдавая себе отчета в этом. Например, известное «правило», гласящее, что «выражение из одной стороны неравенства можно перенести в другую сторону, поменяв при этом знак», есть не что иное, как свойство 2 (из перечисленных). Действительно, добавив к обеим частям неравенства $a>b$ по $-b$, мы получим равносильное неравенство $a-b>b-b$, т. е. $a-b>0$.

Как и при решении уравнений и неравенств, при доказательстве неравенств часто пользуются монотонностью некоторых элементарных функций. Их использование схематически можно записать так:

пусть f — монотонно возрастающая функция на промежутке I, тогда если $a, b \in I$, то

$$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b).$$

1. Сравнение чисел

Начнем с примеров.

Пример 1. Что больше $\log_{12}145$ или $\log_{11}120$?

Решение. Заметим, что $12^2 = 144 < 145 < 12^3$, поскольку $\log_{12}x$ — монотонно возрастает на множестве положительных чисел, то $12^2 < 145 < 12^3 \Leftrightarrow \log_{12}12^2 = 2 < \log_{12}145 < 3 = \log_{12}12^3$. Аналогично, $11^1 < 120 < 11^2 \Leftrightarrow 1 < \log_{11}120 < 2$. Далее, поскольку $\log_{12}145 > 2$, а $2 > \log_{11}120$, то по свойству транзитивности неравенств получаем $\log_{12}145 > \log_{11}120$.

Ответ: $\log_{12}145 > \log_{11}120$.

В этом примере число 2 являет собой как бы «промежуточную оценку», т. е. число, лежащее между большим из двух и меньшим. Часто эту промежуточную оценку совсем легко увидеть и решить тем самым задачу буквально в две строчки.

Пример 2. Что больше: а) $\sqrt{7}$ или $\sqrt[11]{2000}$? б) $\log_2 9$ или $\lg 986$?

Решение. $\sqrt{7} > \sqrt{4} = 2 = \sqrt[11]{2048} > \sqrt[11]{2000}$;

$$\log_2 9 > \log_2 8 = 3 = \lg 1000 > \lg 986.$$

Ответ: $\sqrt{7} > \sqrt[11]{2000}$; $\log_2 9 > \lg 986$.

Пример 3. Что больше $\log_{1/3}\sqrt{4}$ или $\log_{1/7}\sqrt{4+\sqrt{8}}$?

Решение. Вспомним, что $\log_{1/3}x$ и $\log_{1/7}x$ — убывающие функции, поскольку основания меньше единицы. Поэтому

$$\log_{1/3}\sqrt{4} < \log_{1/3}\sqrt{3} = -\frac{1}{2} = \log_{1/7}\sqrt{7} =$$

$$= \log_{1/7}\sqrt{4+3} < \log_{1/7}\sqrt{4+\sqrt{8}},$$

поскольку $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$.

Ответ: $\log_{1/3}\sqrt{4} < \log_{1/7}\sqrt{4+\sqrt{8}}$.

Пример 4. Что больше $\log_{1/2}3$ или $\log_3 \frac{1}{2}$?

Решение. Поскольку $\log_{1/2} x$ — убывающая функция, то

$$\log_{1/2} 3 < \log_{1/2} 2 = -1;$$

с другой стороны, $\log_3 x$ — возрастающая функция, поэтому $\log_3 \frac{1}{2} > \log_3 \frac{1}{3} = -1$. Итак, имеем

$$\log_{1/2} 3 < -1 < \log_3 \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\log_{1/2} 3 < \log_3 \frac{1}{2}$.

Замечание. Конечно, очень удобно решать задачу, если в качестве промежуточной оценки можно использовать целое число. Однако это не всегда можно сделать для исходных чисел (см. пример 3 или пример 5 ниже). В таких случаях полезно следующее соображение: если $a > b$, т. е. $a - b = c > 0$, то, умножив обе части неравенства на число $n > 0$, мы получим по свойству неравенств равносильное неравенство

$$na > nb;$$

при этом, если n достаточно велико, то $na - nb = nc > 1$, т. е. отрезок $[nb, na]$ имеет длину, большую единицы. Это означает, что в этот отрезок попадет хотя бы одно целое число k, такое, что $nb < k < na$. Следовательно, для чисел nb и na есть промежуточная оценка в виде целого числа k (и значит, для исходных чисел a и b промежуточная оценка в виде рационального числа k/n).

Пример 5. Что больше $\log_2 3$ или $\log_5 11$?

Решение. Легко видеть, что $1 < \log_2 3 < 2$ и $1 < \log_5 11 < 2$, т. е. промежуточную оценку можно искать в виде дроби $1 < \frac{m}{n} < 2$. Вместо этого мы увеличим вдвое каждое из чисел, т. е. будем сравнивать $2\log_2 3$ и $2\log_5 11$. Очевидно, что $2\log_2 3 = \log_2 9 > \log_2 8 = 3 = \log_5 125 > \log_5 121 = 2\log_5 11$, т. е. $2\log_2 3 > 2\log_5 11$; отсюда $\log_2 3 > \log_5 11$.

Ответ: $\log_2 3 > \log_5 11$.

Пример 6. Что больше $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ или $\sqrt{3} + 3$?

Решение. Проверим неравенство

$$\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 3.$$

Поскольку обе части положительны, то

$$\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 3 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{11})^2 < (\sqrt{3} + 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13 + 2\sqrt{22} < 12 + 6\sqrt{3},$$

здесь мы воспользовались монотонностью x^2 на положительной полуоси. Далее, отняв от обеих частей по 12 и повторяя такие же рассуждения, мы получим:

$$13+2\sqrt{22}<12+6\sqrt{3}\Leftrightarrow 1+2\sqrt{22}<6\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1+2\sqrt{22})^2<(6\sqrt{3})^2\Leftrightarrow 89+4\sqrt{22}<108\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{22}<19\Leftrightarrow(4\sqrt{22})^2<19^2\Leftrightarrow 352<361.$$

Поскольку последнее неравенство справедливо, то справедливы все промежуточные и исходное неравенства.

Ответ: $\sqrt{2}+\sqrt{11}<\sqrt{3}+3$.

Часто удобно «складывать» неравенства, т. е. пользоваться следующим утверждением:

$$\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases}\Rightarrow a+c>b+d.$$

В самом деле, по свойству 2 имеем:
$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$ и $c>d\Leftrightarrow c+b>b+d$, т. е. $a+c>b+c>d+b$, откуда по свойству 4 (транзитивность) получаем $a+c>d+b$, что и требовалось.

Пример 7. Расположить в порядке возрастания числа, 8, 6 и $\dfrac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Решение. Ясно, что $8>6$. Остается выяснить, куда следует поместить число $a=\dfrac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Прежде всего умножим числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt{5}$, тогда $a=(3\sqrt{35}+5\sqrt{10})/5$. Очевидно, что $5=\sqrt{25}<\sqrt{35}<\sqrt{36}=6$, откуда, умножив на 3/5, получим

$$3<3\sqrt{35}/5<18/5.$$

Кроме того, $3<\sqrt{10}<4$; складывая эти неравенства, получаем:

$$6<a=\frac{3}{5}\sqrt{35}+\sqrt{10}<4+\frac{18}{5}<8.$$

Ответ: $6<\dfrac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}<8$.

Пример 8. Что больше 3^{200} или 2^{300}?

Решение. Имеем $3^{200}=9^{100}>8^{100}=2^{300}$.

Ответ: $2^{300}<3^{200}$.

Пример 9. Что больше $\log_{148}147$ или $\arcsin\cos\dfrac{1}{2}$?

Решение. Заметим, что $\log_{148}147<\log_{148}148=1$. С другой стороны, $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}<\frac{\pi}{6}$, так как $\pi>3$; поскольку $\cos x$ убывает на промежутке $[0;\ \pi]$, имеем

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}\Rightarrow\cos\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\arcsin\cos\frac{1}{2}>\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}>\frac{3}{3}=1$$

(мы воспользовались попутно тем, что $\arcsin x$ — возрастающая функция). Итак,

$$\arcsin\cos\frac{1}{2}>1>\log_{148}147.$$

Ответ: $\arcsin\cos\frac{1}{2}>\log_{148}147$.

Пример 10. Что больше $300!$ или 100^{200}?

Решение: $300!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100\cdot101\cdot\ldots\cdot300>$

$$>\underbrace{100\cdot101\cdot102\cdot\ldots\cdot300}_{\text{201 множитель}}>\underbrace{100\cdot100\cdot\ldots\cdot100}_{\text{201 множитель}}=100^{201}>100^{200}.$$

Ответ: $300!>100^{200}$.

Пример 11. Что больше $\frac{10^{1974}+1}{10^{1975}+1}$ или $\frac{10^{1925}+1}{10^{1926}+1}$?

Решение. Вычислим разность между вторым и первым числами:

$$\frac{10^{1925}+1}{10^{1926}+1}-\frac{10^{1974}+1}{10^{1975}+1}=$$

$$=\frac{10^{3900}+10^{1925}+10^{1975}+1-10^{3900}-10^{1926}-10^{1974}-1}{(10^{1926}+1)\,(10^{1975}+1)}=$$

$$=\frac{9\,(10^{1974}-10^{1925})}{(10^{1926}+1)\,(10^{1975}+1)}>0.$$

Ответ: Второе число больше.

Замечание. Можно, например, увеличить оба числа в 10 раз; тогда

$$\frac{10\cdot(10^{1974}+1)}{10^{1975}+1}=\frac{10^{1975}+1+9}{10^{1975}+1}=1+\frac{9}{10^{1975}+1}$$

и аналогично

$$\frac{10\,(10^{1925}+1)}{10^{1926}+1}=1+\frac{9}{10^{1926}+1}.$$

Отсюда также видно, что второе число больше первого, поскольку $10^{1926}+1<10^{1975}+1$.

2. Некоторые полезные алгебраические неравенства и их применения

Пример 1. Неравенство между средним арифметическим $\frac{a+b}{2}$ и средним геометрическим $\sqrt{ab}$ двух неотрицательных чисел a и b: пусть $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, тогда

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

причем равенство достигается только в случае, когда $a=b$.

Доказательство. Вычтем из обеих частей неравенства $\sqrt{ab}$, получаем

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0.$$

Заметим далее, что

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b.$$

Неравенство доказано.

Пример 2. Доказать, что для неотрицательных a_1, a_2, a_3, a_4 выполняется неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

причем равенство достигается только в случае, когда $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Доказательство. Используем неравенство для средних из примера 1. Именно, поскольку

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2} \text{ и } \frac{a_3+a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_3a_4},$$

то

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}. \qquad (1)$$

Последнее выражение — среднее арифметическое двух чисел $\sqrt{a_1a_2}$ и $\sqrt{a_3a_4}$ (оба числа неотрицательны), поэтому

$$\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}. \qquad (2)$$

Итак, мы получили требуемое неравенство. Исследуем вопрос о том, в каком случае будет точное равенство. Равенство в (2) будет (см. пример 1) только в случае, когда $a_1a_2=a_3a_4$. Аналогично в (1) равенство будет только в случае, когда $a_1=a_2$ и $a_3=a_4$. Итак, равенство будет в случае, когда выполняется условие

$$\begin{cases} a_1=a_2 \\ a_3=a_4 \\ a_1a_2=a_3a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ a_3=a_4 \\ a_1^2=a_3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ a_3=a_4 \\ a_1=a_3 \end{cases} \Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4$$

(строго говоря, $a_1^2=a_3^2 \Leftrightarrow |a_1|=|a_3|$, но поскольку $a_1\geqslant 0$ и $a_3\geqslant 0$, то $|a_1|=a_1$ и $|a_3|=a_3$ и $a_1^2=a_3^2 \Leftrightarrow a_1=a_3$). Доказанное неравенство также является неравенством для среднего арифметического $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$ и среднего геометрического $\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ четырех чисел a_1, a_2, a_3, a_4. Вообще, средним арифметическим n неотрицательных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n называется число $s_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, а их средним геометрическим — число $p_n=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. В общем случае также выполняется неравенство $s_n\geqslant p_n$ ($s_n=p_n \Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n$), но доказательство этого довольно длинное. Несколько отличным от доказательств неравенств примеров 1 и 2 является доказательство для случая $n=3$.

Пример 3. Пусть a_1, a_2, a_3 — неотрицательные числа, доказать, что

$$s_3=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=p_3.$$

Доказательство. Заметим, что среднее арифметическое четырех чисел a_1, a_2, a_3 и s_3 равно s_3:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+s_3}{4}=\frac{a_1+a_2+a_3+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}{4}=$$
$$=\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=s_3;$$

а кроме того, $s_3\geqslant 0$. Используя неравенство, доказанное в примере 2, получаем

$$s_3=\frac{a_1+a_2+a_3+s_3}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3s_3} \text{ или } s_3^4\geqslant a_1a_2a_3s_3,$$

т. е. $s_3^3\geqslant a_1a_2a_3=p_3^3$. Извлекая из обеих частей неравенства корень кубический, получаем

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=s_3\geqslant p_3=\sqrt[3]{a_1a_2a_3},$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$ и $a+\frac{1}{a}\leqslant -2$ при $a<0$.

Доказательство. Пусть $a>0$, тогда $1/a>0$ и согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\geqslant \sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1, \text{ т. е. } a+\frac{1}{a}\geqslant 2.$$

Если $a<0$, то $-a>0$ и $-\frac{1}{a}>0$, поэтому, как только что было показано,

$$(-a)+\left(-\frac{1}{a}\right)\geqslant 2, \text{ т. е. } a+\frac{1}{a}\leqslant -2.$$

Доказательство окончено.

Пример 5. Доказать неравенство

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc \quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0).$$

Доказательство. Заметим, что

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\ b+c\geqslant 2\sqrt{bc} \text{ и } c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$$

согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим. Перемножая (объясните, почему это можно сделать) эти неравенства, получаем

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}=$$
$$=8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc.$$

Можно дать другое доказательство этого неравенства, заметив, что

$$(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geqslant 0$$

(проделайте подробные выкладки!).

Пример 6. Доказать, что при $a>0$, $b>0$, и $c>0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Доказательство. Имеем (см. пример 1)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}},\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{ac}},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{bc}},$$

складывая эти неравенства, получаем нужное нам неравенство. Заметим, что в исходном неравенстве достигается знак равенства только в том случае, когда во всех трех вспомогательных неравенствах достигается знак равенства, т. е. когда $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ или, что то же самое, когда $a=b=c$.

Пример 7. Доказать, что если $a>0$, $b>0$ и $a\neq b$, то $a^6+b^6>a^5b+b^5a$.

Доказательство. Исходное неравенство эквивалентно неравенству $a^6+b^6-a^5b-b^5a>0$. Докажем его:

$$a^6-a^5b+b^6-b^5a=a^5(a-b)+b^5(b-a)=(a-b)(a^5-b^5),$$

но если $a>b$, то $a^5>b^5$, и оба сомножителя положительны, если $a<b$, то $a^5<b^5$ и оба сомножителя отрицательны; в обоих случаях произведение положительно. Это и доказывает исходное неравенство.

Пример 8. Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$, $b+c>0$, $c+a>b$ и $a+b>c$. Доказать, что

$$2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca. \qquad (1)$$

Доказательство. Неравенство $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ есть следствие неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, для его доказательства достаточно сложить три очевидных неравенства (сравните с примером 5):

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab,\quad \frac{a^2+c^2}{2}\geqslant ac \text{ и } \frac{b^2+c^2}{2}\geqslant bc.$$

Для доказательства второго неравенства

$$2(ab+bc+ac)>a^2+b^2+c^2 \qquad (2)$$

заметим, что так как $b+c>a$ и $a>0$, то $ab+ac=a(b+c)>a\cdot a=a^2$ (мы умножили обе части неравенства $b+c>a$ на a). Аналогично $cb+ab=b(c+a)>b\cdot b=b^2$ и $ac+bc=c(a+b)>c\cdot c=c^2$. Складывая эти три неравенства, получаем неравенство (2). Доказательство неравенств (1), таким образом, закончено.

Пример 9. Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$. Доказать, что

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc. \qquad (1)$$

Доказательство. Согласно неравенству между средними имеем

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc} \text{ и } \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Перемножив эти неравенства, получаем неравенство (1).

Пример 10. Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$, доказать неравенство

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c). \qquad (1)$$

Доказательство. Перепишем левую часть (1) в виде

$$b\left(\frac{a^2b+bc^2}{2}\right)+a\left(\frac{ab^2+c^2a}{2}\right)+c\left(\frac{b^2c+ca^2}{2}\right). \qquad (2)$$

Выражения в скобках по неравенству между арифметическим и геометрическим средними не меньше, чем abc:

$$\frac{a^2b+bc^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2b\cdot bc^2} = abc \text{ и т. д.}$$

Поэтому выражение (2) не меньше, чем

$$b(abc)+a(abc)+c(abc)=abc(a+b+c),$$

что и требовалось доказать.

Пример 11. Доказать, что $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ для любого натурального $n>1$.

Доказательство. По определению $n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)(n-1)n$; перегруппируем сомножители в этом произведении следующим образом: $n!=[1\cdot n]\cdot[2\cdot(n-1)]\cdot[3\cdot(n-2)]\ldots$, т. е. последний сомножитель n с первым 1, предпоследний $(n-1)$ со вторым 2, третий с конца $(n-2)$ с третьим сначала 3 и т. д. (Подумайте, какой сомножитель при такой группировке окажется последним? Рассмотрите случай четных n и нечетных в отдельности; проверьте все последующие рассуждения в обоих случаях.) Теперь оценим каждую пару сомножителей по неравенству для средних:

$$\sqrt{1\cdot n} \leqslant \frac{n+1}{2};\ \text{т. е. } 1\cdot n \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2;$$

$$\sqrt{2(n-1)} \leqslant \frac{n-1+2}{2};\ \text{т. е. } 2(n-1) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2;$$

$$\sqrt{3(n-2)} \leqslant \frac{n-2+3}{2};\ \text{т. е. } 3\cdot(n-2) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2;\ \text{и т. д.}$$

Перемножая наши неравенства, получаем требуемое.

Пример 12. Доказать, что при $n>2$

$$n! > n^{\frac{n}{2}}. \qquad (1)$$

Доказательство. Перепишем это неравенство в виде $(n!)^2>n^n$; далее $(n!)^2=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n=$
$=[1\cdot n][2\cdot(n-1)][3(n-2)]\ldots[(n-2)3][(n-1)2][n\cdot 1]$. (2)

Мы сгруппировали сомножители так, что получили произведение квадратных скобок вида $[(n-k+1)k]$, где $k=1, 2, \ldots, n$ (сравните с примером 11). Докажем, что

$$(n-k+1)\cdot k > n \text{ при } 1<k<n. \tag{3}$$

Действительно,

$$(n-k+1)k-n=k(n-k)-(n-k)=(n-k)(k-1)\geqslant 0.$$

Заметим, что равенство имеет место лишь в случаях $k=1$ и $k=n$; поэтому, заменяя в (2) каждую квадратную скобку на n, получим в соответствии с неравенствами (3), что $(n!)^2 > n\cdot n\cdot n \ldots n = n^n$ (n раз). Доказательство окончено.

Пример 13. Пусть a, b, c положительны, доказать неравенство

$$3(bc+ca+ab)\leqslant (a+b+c)^2. \tag{1}$$

Доказательство. Перепишем это неравенство в эквивалентной форме

$$(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)\geqslant 0. \tag{2}$$

Преобразуем левую часть этого неравенства

$$(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(a^2-2ac+c^2)+\frac{1}{2}(b^2-2bc+c^2)=$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2].$$

Итак, правая часть неотрицательна, поскольку она является суммой квадратов; это и заканчивает доказательство неравенства (1).

Пример 14. Доказать, что если a, b, c положительны, то

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c).$$

Доказательство. Заметим, что

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant (a+b)ab,$$

поскольку

$$(a-b)^2\geqslant 0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\geqslant 0\Rightarrow a^2-ab+b^2\geqslant ab.$$

Аналогично получаем

$$a^3+c^3\geqslant ac(a+c) \text{ и } b^3+c^3\geqslant bc(b+c).$$

Складывая эти три неравенства, получаем требуемое.

Пример 15. Доказать, что

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\,(b_1^2+ \\ +b_2^2+\ldots+b_n^2). \qquad (1)$$

Доказательство. Приведем пример изящного доказательства этого неравенства. Введем для краткости следующие обозначения:

$$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,\ C=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2 \text{ и}$$

$$B=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Нам нужно доказать, что $B^2-AC\leqslant 0$. Рассмотрим выражение $F(t)=(a_1t-b_1)^2+(a_2t-b_2)^2+\ldots+(a_nt-b_n)^2$, которое неотрицательно при любых t. Раскрыв все скобки, получаем

$$F(t)=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\,t^2-2\,(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\,t+ \\ +(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=At^2-2Bt+C.$$

Итак, $F(t)$ — квадратный трехчлен с положительным первым коэффициентом A, не принимающий отрицательные значения, и, значит, с неположительным дискриминантом $D=4B^2-4AC\leqslant 0$. Отсюда следует требуемое неравенство $B^2-AC\leqslant 0$.

Пример 16. Доказать, что если $a+b=1$, то

$$a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть a и b — числа разных знаков, например $a>0$ и $b\leqslant 0$, тогда $a=1-b=1+|b|\geqslant 1$, и, значит, $a^4\geqslant 1$. Следовательно, в этом случае $a^4+b^4\geqslant a^4\geqslant \\ \geqslant 1>\frac{1}{8}$ и неравенство (1) выполнено. В случае, когда a и b одного знака, из равенства $a+b=1$ следует, что $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$. В этом случае из неравенства для средних получаем

$$0\leqslant ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Далее, $(a+b)^4=1$, но, с другой стороны,

$$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab\,(a^2+b^2)-6a^2b^2=1-4ab\,(a^2+b^2)-6a^2b^2$$

и

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab.$$

Значит,

$$a^2+b^2\geqslant 1-2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

и

$$a^4+b^4\geqslant 1-4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

Пример 17. Доказать, что если a и b — неотрицательны и $a^2+b^2=1$, то

$$1 \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt[4]{8}. \qquad (1)$$

Доказательство. Заметим сразу, что

$$0 \leqslant ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Тогда, так как $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, то $1=a^2+b^2 \leqslant (a+b)^2 \leqslant a^2+b^2+1=2$, т. е. $1 \leqslant a+b \leqslant \sqrt{2}$. Аналогично,

$$1 \leqslant a+b \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leqslant$$

$$\leqslant a+b+2\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2},$$

т. е.

$$1 \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8},$$

что и заканчивает доказательство.

3. Применение дифференцирования к доказательству неравенств

Один из распространенных методов доказательства неравенства, скажем, вида $f(x)>0$ на промежутке I состоит в том, что мы находим наименьшее значение $f(x)$ на этом промежутке: если оно положительно, то $f(x)>0$ на всем промежутке.

Пример 1. Доказать, что $\sin x<x$ при $x>0$.

Доказательство. Рассмотрим дифференцируемую функцию на всей числовой прямой $f(x)=x-\sin x$, нужно доказать, что $f(x)>0$ при $x>0$. Заметим, что $f(0)=0$ и $f'(x)=1-\cos x \geqslant 0$, причем на промежутке $]0; \pi]$ имеем $f'(x)>0$, т. е. $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[0, \pi]$. Следовательно, неравенство $f(x)>f(0)=0$ выполнено для всех $0<x\leqslant\pi$. Для $x>\pi$ неравенство $f(x)>0$ выполнено тем более: $x>\pi>\sin x \Rightarrow x>\sin x$.

Пример 2. Доказать, что $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$ при $x\neq 0$.

Доказательство. Поскольку и справа и слева стоят четные функции, то достаточно доказать неравенство для $x>0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$. Заметим, что $f(0)=0$ и $f'(x)=-\sin x+x>0$ при $x>0$, как было доказано в примере 1. Далее, на промежутке $[0; +\infty[$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, т. е. $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Что больше $\log_{11}12$ или $\lg 11$?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\log_x(x+1)$, определенную при $x>1$, и заметим, что первое из чисел есть не что иное, как $f(11)$, а второе $f(10)$. Если функция $f(x)$ окажется монотонной, то ответ будет очевиден. Итак, вычислим производную $f'(x)$:

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\ln x-\frac{1}{x}\ln(x+1)}{\ln^2 x}=$$

$$=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}<0,$$

так как $1<x<x+1$ и $0<\ln x<\ln(x+1)$. Таким образом, мы выяснили, что $f(x)$ монотонно убывает, но в этом случае $11>10\Rightarrow f(11)<f(10)$, т. е. $\log_{11}12<\lg 11=\log_{10}11$.

Ответ: $\log_{11}12<\lg 11$.

Поскольку два числа можно включить в область значений многих функций, то на успех в этом случае можно надеяться только тогда, когда мы выбрали достаточно легко исследуемую монотонную функцию.

Пример 4. Что больше $\sqrt[10]{11}$ или $\sqrt[11]{12}$?

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Первое из чисел есть $f(x)=f(10)$, второе равно $f(11)$. Чтобы выяснить, будет ли $f(x)$ монотонна при $x\geqslant 10$, рассмотрим другую функцию (более удобную для исследования) $g(x)=\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$. Вычислим ее производную $g'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2}$. Заметим, что при $x\geqslant 10$ выполняются неравенства $\frac{x}{x+1}<1<\ln(1+x)$, т. е. $g'(x)<0$. Отсюда следует, что

$$g(10)>g(11)\Leftrightarrow\ln f(10)>\ln f(11)\Leftrightarrow f(10)>f(11).$$

Ответ: $\sqrt[10]{11}>\sqrt[11]{12}$.

§ 5. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Уравнение (неравенство) с параметром имеет вид $f(x, a)=0(\geqslant 0)$, где x — искомая переменная, a — параметр. При этом могут ставиться самые разные задачи: для каждого значения a найти решения этого уравнения; найти количество корней в зависимости от a; при каких a корни уравнения удовлетворяют такому условию и т. п. Наша

цель — рассмотреть некоторые методы, позволяющие рационально решать такие задачи.

Рассмотрим сначала «стандартные» методы решений.

Пример 1. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = a + 2, & (1) \\ 2ax + (a+1)y = 2a + 4 & (2) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Выразим из уравнения (1) y через x:

$$(1) \Leftrightarrow 2y = -ax + a + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{a}{2} + 1$$

и подставим в уравнение (2) это выражение:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{a}{2} + 1, \\ 2ax + (a+1)\left(-\frac{a}{2}x + \frac{a}{2} + 1\right) = 2a + 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{a}{2} + 1, & (3) \\ x\left(\frac{3}{2}a - \frac{a^2}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} + 3. & (4) \end{cases}$$

Теперь заметим, что если уравнение (4) имеет какое-нибудь решение x_0, то из уравнения (3) всегда найдется соответствующее значение y_0 и, значит, система (1)—(2) будет иметь решение (x_0, y_0). Таким образом, чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (4) имело хотя бы одно решение. Рассмотрим уравнение вида $Ax = B$. Если $A \neq 0$, то оно имеет единственное решение $x = \frac{B}{A}$.

Если $A = 0$, то получаем $0 = B$ — высказывание, справедливое при $B = 0$ и ложное при $B \neq 0$. Результат запишем в виде таблицы:

$A \neq 0$	B — любое	решение единственное	$x = \frac{B}{A}$
$A = 0$	$B = 0$	решений бесконечно много	$x \in \mathbf{R}$
$A = 0$	$B \neq 0$	решений нет	$x \in \varnothing$

Нам проще найти, при каких a система не имеет решений, тогда все оставшиеся значения дают ответ на вопрос:

(Система не имеет решений) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}a - \frac{a^2}{2} = 0, \\ -\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} + 3 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \quad \text{или} \quad a = 3, \\ a^2 - a - 6 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

Ответ: $a \neq 0$.

Пример 2. Определить, при каких a система

$$(S) \begin{cases} x^2 + (y+3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Воспользовавшись правилом подстановки, получаем

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2ax^2 + 3)^2 < 4, & (1) \\ y = 2ax^2. & (2) \end{cases}$$

Очевидно, если неравенство (1) имеет хотя бы одно решение, то, подставив это решение в (2), получаем решение системы (S). Таким образом, наша задача равносильна следующей:

при каких a неравенство

$$x^2 + (2ax^2+3)^2 < 4 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение?

Перепишем неравенство (1):

$$(1) \Leftrightarrow 4a^2x^4 + (12a+1)x^2 + 5 < 0. \qquad (3)$$

Неравенство (3) нельзя назвать биквадратным — при $a=0$ коэффициент при x^4 равен нулю. Поэтому рассмотрим два случая.

I случай. При $a=0$ неравенство (3) принимает вид $x^2 + 5 < 0$; но левая часть больше нуля при всех x и, значит, оно не имеет решений.

II случай. При $a \neq 0$ неравенство (3) — биквадратное; оно сводится к решению системы

$$\begin{cases} 4a^2t^2 + (12a+1)t + 5 < 0, & (4) \\ t = x^2. & (5) \end{cases}$$

Из условия (5) видно, что неравенство (4) должно иметь, по крайней мере, одно неотрицательное решение. Если не-

равенство (4) имеет решения, то они имеют вид $t\in]t_1;\ t_2[$, где t_1 и t_2 — корни уравнения

$$4a^2t^2+(12a+1)t+5=0, \qquad (6)$$

причем $t_1\neq t_2$, т. е. дискриминант должен быть >0.

Из всего вышесказанного следует, что условия разрешимости системы (4)—(5) (т. е. неравенства (3)) можно представить в виде:

$$\begin{cases} D=(12a+1)^2-4\cdot 5\cdot 4a^2>0, & (7)\\ t_2=\dfrac{-12a-1+\sqrt{D}}{8a^2}>0 & (8)\end{cases}$$

(здесь t_2 — больший корень уравнения (6)).

$$\begin{cases}(7)\\(8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}64a^2+24a+1>0,\\ -12a-1+\sqrt{64a^2+24a+1}>0,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}64a^2+24a+1>0,\\ \sqrt{64a^2+24a+1}>12a+1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}64a^2+24a+1>0,\\ 12a+1\leqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}12a+1>0,\\ 64a^2+24a+1>144a^2+24a+1,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(S_1)\begin{cases}a<\dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}\ \text{ или }\ a>\dfrac{-3+\sqrt{5}}{16},\\ a\leqslant-\dfrac{1}{12},\end{cases}\\ (S_2)\begin{cases}a>-\dfrac{1}{12},\\ 80a^2<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Заметим, что система (S_2) не имеет решений. Для решения системы (S_1) сравним значение $-\frac{1}{12}$ с корнями квадратного трехчлена $64a^2+24a+1$, т. е. с числами $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{16}$.

Обычно это делается так. Поскольку мы не знаем, какое из чисел больше, соединим их знаком $\vee$, а дальше поступаем, как с обычными неравенствами:

$$\frac{-3-\sqrt{5}}{16}\vee-\frac{1}{12};$$

умножим обе части на 48, получим

$$-9-3\sqrt{5}\vee -4;$$

добавим к обеим частям по $+9$, получим

$$-3\sqrt{5}\vee 5.$$

Очевидно, $5>0>-3\sqrt{5}$, тогда, повторяя все рассуждения в обратном порядке, получим $\frac{-3-\sqrt{5}}{16}<-\frac{1}{12}$.

Конечно, в данном случае можно поступить и проще:

$$\frac{-3-\sqrt{5}}{16}<-\frac{3}{16}=-\frac{9}{48}<-\frac{4}{48}=-\frac{1}{12},$$

но *следует освоить и описанный выше прием.*

Сравним $\frac{-3+\sqrt{5}}{16}$ и $-\frac{1}{12}$:

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{16}\vee -\frac{1}{12}\Leftrightarrow -9+3\sqrt{5}\vee -4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5}\vee 5\Leftrightarrow 9\cdot 5\vee 25,$$

но $45>25$ и, значит, в исходном неравенстве

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{16}>-\frac{1}{12}.$$

Отсюда видно, что

$$(S_1)\Leftrightarrow a<\frac{-3-\sqrt{5}}{16}.$$

Ответ: $a<\frac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

Пример 3. При каких a из неравенства

$$x^2-a(1+a^2)x+a^4<0 \qquad (1)$$

следует неравенство $x^2+4x+3<0$? (2)

Решение. По условию задачи множество решений неравенства (1) является подмножеством множества решений неравенства (2). В частности, если неравенство (1) не имеет решений, то из него следует любое неравенство (а значит, и (2)), поскольку пустое множество является подмножеством любого множества. Поэтому рассмотрим два случая.

I случай. Неравенство (1) не имеет решений

$$\Leftrightarrow D=a^2(1+a^2)^2-4a^4\leqslant 0\Leftrightarrow a^2(1+2a^2+a^4-4a^2)\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(1-a^2)^2\leqslant 0\Leftrightarrow a^2(1-a^2)^2=0 \qquad (3)$$

(последнее следует из того, что квадрат действительного числа неотрицателен!).

$$(3) \Leftrightarrow a=0 \text{ или } a\pm 1.$$

II случай. Для того чтобы неравенство (1) имело решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был положительным:

$$a^2(1-a^2)^2>0, \text{ т. е. } a\neq 0,\ a\neq \pm 1.$$

При этом корни трехчлена $x^2-a(1+a^2)x+a^4$ суть $x=a$ или $x=a^3$, а решения неравенства — интервал между этими корнями. Решения второго неравенства — интервал $]-3, -1[$. Поэтому условия задачи можно записать так:

$$\begin{cases} -3\leqslant a\leqslant -1, \\ -3\leqslant a^3\leqslant -1, \\ a\neq 0;\ a\neq \pm 1, \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3}\leqslant a<-1$$

(обратите внимание на то, что неравенства нестрогие; почему?).

Ответ: $a\in[-\sqrt{3}; -1]\cup\{0\}\cup\{+1\}$.

Здесь в ответе -1 включена в первый промежуток.

Пример 4. Найти множество таких пар действительных чисел $(a; b)$, для каждой из которых при всех положительных x справедливо равенство $a\ln x+b=\ln(ax+b)$.

Решение. Поскольку функции, записанные справа и слева, совпадают на этом луче: $]0; \infty[$, то и их производные совпадают на этом луче:

$$\frac{a}{x}=\frac{1}{ax+b}\cdot a \Leftrightarrow \frac{a(ax+b-x)}{(ax+b)x}=0$$

при всех $x>0$. Следовательно, либо $a=0$, либо $(a-1)x+b=0$ при всех x, т. е. $a=1$, $b=0$.

Рассмотрим отдельно каждый из случаев.

I случай. Пусть $a=0$, тогда исходное равенство имеет вид $b=\ln b$. Покажем, что это уравнение не имеет решений. Для этого рассмотрим разность $f(b)=b-\ln b$. При $b=1$, $f(b)=1>0$, при всех $b>1$ производная $f'(b)=1-\frac{1}{b}>0$, следовательно, $f(b)$ монотонно растет на луче $[1; \infty[$, т. е. $f(b)>f(1)=1$.

Таким образом, на этом луче $b-\ln b>1\Rightarrow b>\ln b$ нет корней уравнения $b=\ln b$. Поскольку $\ln b$ определен только при $b>0$ и при этом $\ln b<0$ для $b<1$, то на промежутке $]0; 1[$ имеем

$$b>0>\ln b \Rightarrow b>\ln b,$$

что означает отсутствие корней уравнения $b=\ln b$ на этом промежутке и, значит, вообще. Следовательно, a не может равняться нулю.

II случай. Пусть $a=1$ и $b=0$; подставляя их в исходное равенство, получаем $1\cdot\ln x+0=\ln(1\cdot x+0)$ тождество, справедливое при всех положительных x.

Ответ: $(a;\ b)=(1;\ 0)$.

В некоторых задачах удобнее рассматривать задачу с параметром как задачу с несколькими переменными, а затем,

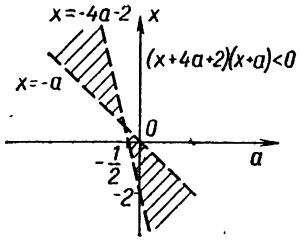


Рис. 18

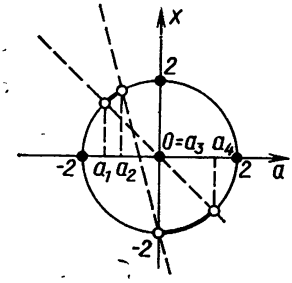


Рис. 19

упростив ее, получать решения в зависимости от параметра. При этом геометрическая интерпретация может очень сильно помочь в решении задачи.

Пример 5. При каких a существует хотя бы одно действительное x, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)\,x+4a^2+2a<0, & (1)\\ x^2+a^2=4? & (2)\end{cases}$$

Решение. Как легко видеть, корнями квадратного трехчлена (1) являются

$$x=\frac{5a+2+\sqrt{(5a+2)^2-16a^2-8a}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-4a-2,\\ x=-a.\end{array}\right.$$

Последняя совокупность задает на плоскости Oxa объединение двух прямых. Эти две прямые разбивают всю плоскость Oxa на 4 области, в каждой из которых трехчлен имеет постоянный знак (рис. 18): $x^2+(5a+2)x+4a^2+2a=(x+4a+2)(x+a)<0$. На этом рисунке заштрихована область, в которой выполняется неравенство (1), прямые не принадлежат этой области и потому проведены пунктиром.

Уравнение (2) определяет окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Решения системы отмечены жирной линией на рис. 19 — это объединение двух дуг (без концов).

Отсюда ясно, что система (1)—(2) имеет решения (пары $(a;\ x)$!) при $a\in]a_1;\ a_2[\cup]a_3;a_4[$, где $a_1<a_4$ — решения системы

$$(S_1)\begin{cases} x=-a, \\ x^2+a^2=4, \end{cases}$$

и $a_2<a_3$ — абсциссы точек пересечения прямой $x=-4a-2$ с окружностью $x^2+a^2=4$, т. е. решения системы

$$(S_2)\begin{cases} x=-4a-2, \\ x^2+a^2=4. \end{cases}$$

Отсюда легко находим:

$$a_1=-\sqrt{2};\ a_4=\sqrt{2};\ a_2=-\frac{16}{17};\ a_3=0.$$

Таким образом, система (1)—(2) имеет решения при $a\in\left]-\sqrt{2};\ -\frac{16}{17}\right[\cup]0;\ \sqrt{2}[$, но тогда для каждого такого a есть x, удовлетворяющий системе (1)—(2) (именно тот x, который входит в соответствующую пару $(a;\ x)$). Наоборот, если для какого-нибудь a есть x, удовлетворяющий системе (1)—(2), то пара $(a;\ x)$ есть ее решение. Другими словами, система (1)—(2) с параметром a имеет решения при тех значениях a, которые входят в решения этой системы как системы с двумя переменными $(a;\ x)$, и только при них.

Ответ: $a\in\left]-\sqrt{2};\ -\frac{16}{17}\right[\cup]0;\ \sqrt{2}[$.

Пример 6. Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2+4x-2|x-a|+2-a=0 \qquad (1)$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. По определению модуля имеем:

$$(1)\left[\begin{array}{l} (S_1)\begin{cases} x-a\geqslant 0, \\ x^2+2x+2+a=0, \end{cases} \\ (S_2)\begin{cases} x-a\leqslant 0, \\ x^2+6x+2-3a=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Изобразим решения системы (S_1) на плоскости Oxa. Для этого уравнение в системе перепишем в виде $a=-x^2-2x-2$; тогда очевидно, что решения (S_1) — пересечение параболы $a=-x^2-2x-2=-(x+1)^2-1$ с полуплоскостью $x\geqslant+a$ (рис. 20). Обратите внимание на то, что вершина параболы $(-1;\ 1)$ лежит на прямой $x-a=0$!

Изобразим решения системы (S_2):

$$(S_2)\Leftrightarrow\begin{cases} x-a\leqslant 0, \\ a=\frac{1}{3}(x^2+6x+2). \end{cases}$$

Решения совокупности (S_1) или (S_2) — объединение этих множеств — изображены на рис. 21.

На рис. 21 хорошо видно, что при $a=-2$ есть три пары решений (x, a) — суть: (0; 2), (—2; —2), (—4; —2); это означает, что исходное уравнение при $a=-2$ имеет три решения $\{0; -2; -4\}$ (проверьте!). Совершенно аналогично при $a=-\frac{7}{3}$ также три решения. При $-\frac{7}{3}<a<-2$ имеется целых четыре решения, которые, как легко заметить, явля-

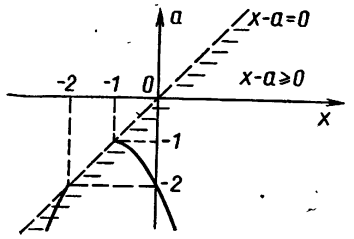


Рис. 20

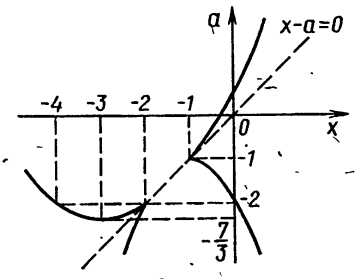


Рис. 21

ются четырьмя корнями совокупности уравнений из систем (S_1) и (S_2) (без неравенств!). Ровно два различных решения x совокупность $(S_1)-(S_2)$ будет иметь при $a>-2$ или $a<-\frac{7}{3}$. Поясните это.

Ответ: $a\in\left]-\infty; -\frac{7}{3}\right[\cup]-2; +\infty[$.

В данной задаче не требовалось находить корни уравнения. Если это нужно, то чертеж хорошо помогает выписать корни. К примеру, при $a\geqslant-1$ все пары лежат на параболе $a=\frac{1}{3}(x^2+6x+2)$, т. е. соответствующие x — корни уравнения из (S_2):

$$x^2+6x+2-3a=0\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-8+12a}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-3+\sqrt{7+3a},\\ x=-3-\sqrt{7+3a}.\end{array}\right.$$

При $-2<a<-1$ — это меньший корень уравнения x^2+6x+

$+2-3a=0$ и больший корень уравнения $x^2+2x+2+a=0$,

т. е. $x=-3-\sqrt{7+3a}$ или $x=-1+\sqrt{-a-1}$.

Чтобы понять это, следует заметить, что парабола, скажем, $a=-x^2-2x-2$ может быть также задана уравнениями своей правой и левой ветвей. Например, множество, определяемое уравнением $x=-1+\sqrt{-a-1}$, задает правую ветвь параболы $a=-x^2-2x-2$:

$$x=-1+\sqrt{-a-1}\Leftrightarrow\sqrt{-a-1}=x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ -a-1=(x+1)^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\ a=-x^2-2x-2.\end{cases}$$

Аналогично, $x=-1-\sqrt{-a-1}$ задает левую ветвь.

При $-\frac{7}{3}\leqslant a\leqslant -2$ — это четыре корня:

$$x_1=-3-\sqrt{7+3a},\ x_3=-1-\sqrt{-a-1},$$

$$x_2=-3+\sqrt{7+3a},\ x_4=-1+\sqrt{-a-1},$$

причем, как легко видеть, при $a=-2$ два из них (x_2 и x_3) сливаются; при $a=-\frac{7}{3}$ сливаются x_1 и x_3.

При решении многих задач большую помощь оказывает несколько почти очевидных свойств квадратных трехчленов. Отметим некоторые из них.

а) Всякий квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ представим в виде

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a(x-x_0)^2+y_0,$$

где $x_0=-\frac{b}{2a}$ и $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Точка (x_0, y_0) является вершиной параболы $f(x)=ax^2+bx+c$.

б) При $a>0$ функция $f(x)$ убывает на промежутке $]-\infty; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty[$. Минимум достигается в точке x_0 и равен y_0.

в) При $a<0$ функция $f(x)$ возрастает на промежутке $]-\infty; x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0; +\infty[$. Максимум достигается в точке x_0 и равен y_0.

г) Зависимость решений квадратных уравнений и неравенств от коэффициентов можно записать в виде следующей таблицы:

Знак коэффициента a	Знак дискриминанта $D=b^2-4ac$	Корни уравнения $f(x)=0$	Решения неравенства $f(x)<0$	Решения неравенства $f(x)>0$
$a>0$	$D>0$	два корня $x_2>x_1$	$]x_1;\ x_2[$	$]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$
	$D=0$	один корень $x_0=-\frac{b}{2a}$	$\varnothing$	$]-\infty;x_0[\cup]x_0;+\infty[$
	$D<0$	нет корней	$\varnothing$	R
$a<0$	$D>0$	два корня $x_2>x_1$	$]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$	$]x_1;\ x_2[$
	$D=0$	один корень $x_0=-\frac{b}{2a}$	$]-\infty;x_0[\cup]x_0;+\infty[$	$\varnothing$
	$D<0$	нет корней	R	$\varnothing$

д) Если $a>0$ и в какой-нибудь точке z квадратный трехчлен $f(z)<0$, то $f(x)$ имеет два корня x_1 и x_2, которые лежат по разные стороны от z, т. е. $x_1<z<x_2$.

Доказательство. Действительно, так как $f(z)<0$, то z — одно из решений неравенства $f(x)<0$. Мы знаем (см. таблицу выше), что при $a>0$ множество решений неравенства $f(x)<0$ непусто тогда и только тогда, когда существуют два корня x_1 и x_2 квадратного уравнения $f(x)=0$. Наконец, поскольку решения неравенства $f(x)<0$ образуют промежуток $]x_1;\ x_2[$, то $z\in]x_1;\ x_2[$ и, значит, $x_1<z<x_2$, что и требовалось доказать.

Аналогично, если $a<0$ и $f(z)>0$, то существуют два корня x_1 и x_2 квадратного уравнения $f(x)=0$, которые лежат по разные стороны z.

е) Если $a>0$ (соответственно $a<0$) и $f(z)>0$ (соответственно $f(z)<0$), то уравнение $f(x)=0$ или не имеет корней, или имеет один корень, или имеет два корня, которые лежат по одну сторону от z, т. е. либо $x_1<x_2<z$, либо $z<x_1<x_2$.

Доказательство совершенно аналогично предыдущему.

ж) Если $f(z_1)>0$, $f(z_2)<0$ и $z_1<z_2$, то на промежутке $]z_1;\ z_2[$ имеется ровно один корень уравнения $f(x)=0$.

Доказательство. Пусть $a>0$, тогда из условия $f(z_2)<0$ следует, что уравнение $f(x)=0$ имеет два корня $x_1<x_2$, причем $x_1<z_2<x_2$. С другой стороны, из условия $f(z_1)>0$ следует, что оба корня лежат с одной стороны от z, но $z_1<z_2<x_2$, значит, оба корня лежат правее z_1, т. е. $z_1<$

$<x_1<x_2$. Сопоставляя полученные неравенства, мы видим, что $z_1<x_1<z_2<x_2$, т. е. на промежутке $]z_1; z_2[$ лежит ровно один (меньший) корень уравнения $f(x)=0$. Аналогично рассматривается случай $a<0$.

Рассмотрим теперь на примерах, как применяются подобного рода рассуждения.

Пример 7. При каких a уравнение

$$\sin^2 x-(5a+b)\cos x-a^2=0 \qquad (1)$$

не имеет решений?

Решение. Прежде всего заметим, что это уравнение, по сути, квадратное относительно $\cos x$, поэтому все сведется к исследованию квадратного трехчлена. Итак, обозначим $y=\cos x$, тогда $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-y^2$; в новых обозначениях уравнение (1) выглядит так:

$$1-y^2-(5a+6)y-a^2=0\Leftrightarrow y^2+(5a+6)y+a^2-1=0. \qquad (2)$$

Теперь исходную задачу можно сформулировать следующим образом: «при каких a система

$$\begin{cases} y^2+(5a+6)y+a^2-1=0, & (2)\\ y=\cos x & (3)\end{cases}$$

не имеет решений?»

Остается заметить, что система (2)—(3) не имеет решения в двух случаях:

а) если уравнение (2) не имеет корней, т. е. $D=(5a+6)^2-4(a^2-1)<0$;

б) если уравнение (2) имеет корни, но они по абсолютной величине больше единицы, т. е. когда уравнение (3) не имеет решений. При этом случай б) сам сводится к рассмотрению трех случаев: корни больше единицы; корни меньше минус единицы; один больше единицы, другой меньше минус единицы. «Стандартный подход» приводит, таким образом, к рассмотрению четырех случаев, причем в трех из них приходится решать иррациональные неравенства (а это значит, что придется дополнительно рассмотреть еще ряд случаев!).

Несколько короче выглядит решение, основанное на использовании упомянутых или аналогичных им свойств квадратного трехчлена. Пусть $f(y)=y^2+(5a+6)y+a^2-1$. Рассмотрим упомянутые четыре случая.

а) $D<0\Leftrightarrow 21a^2+60a+40<0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-30-2\sqrt{15}}{21}<a<\frac{-30+2\sqrt{15}}{21}.$$

Этот случай изображен на рис. 22.

б$_1$) Корни больше единицы $\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) > 0, \\ f'(1) < 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$

Действительно, если $f'(1) < 0$, то так как квадратный трехчлен убывает на промежутке $]-\infty, x_0]$ и, значит, $1 \in]-\infty, x_0]$, получаем, что он убывает на $]-\infty; 1]$. Это означает, что

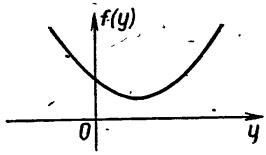


Рис. 22

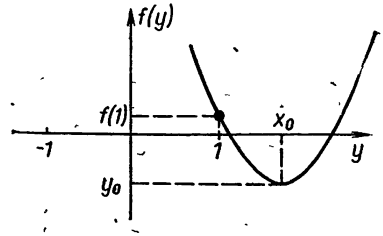


Рис. 23

при $y < 1$ имеет место неравенство $f(y) > f(1)$, но $f(1) > 0$, поэтому $f(y) > 0$, т. е. корней на промежутке $]-\infty, 1]$ нет. Поскольку $D \geqslant 0$, то квадратный трехчлен имеет по крайней мере один корень, значит, этот корень больше 1 (рис. 23).

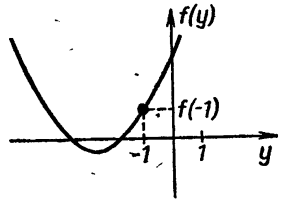


Рис. 24

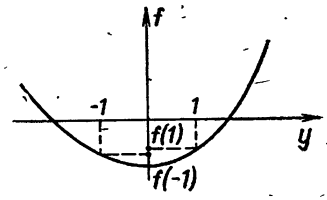


Рис. 25

Обратим внимание, что условие $D \geqslant 0$ мы можем исключить из системы для уменьшения количества неравенств, так как все a, при которых $D < 0$, удовлетворяют нашим требованиям.

б$_2$) Корни меньше минус единицы $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) > 0, \\ f'(-1) > 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$

Здесь рассуждения совершенно аналогичны (рис. 24).

б$_3$) Один корень меньше -1, а другой корень больше 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases}$

Проведите здесь соответствующие рассуждения (рис. 25). Еще раз отметим, что в случаях б$_1$)—б$_3$) можно отбросить

условия $D \geqslant 0$. Итак, получаем, что исходная задача равносильна совокупности:

$$(F)\left[\begin{array}{l} D<0 \Leftrightarrow \dfrac{-30-2\sqrt{15}}{21}<a<\dfrac{-30+2\sqrt{15}}{21}; \\ \begin{cases} f(1)>0, \\ f'(1)<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+5a+6+a^2-1>0, \\ 2+5a+6<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+5a+6>0, & (4) \\ 5a<-8; & (5) \end{cases} \\ \begin{cases} f(-1)>0, \\ f'(-1)>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-5a-6+a^2-1>0, \\ -2+5a+6>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5a-6>0, & (6) \\ 5a>-4; & (7) \end{cases} \\ \begin{cases} f(1)<0, \\ f(-1)<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+5a+6<0, & (8) \\ a^2-5a-6<0. & (9) \end{cases} \end{array}\right.$$

Решаем последовательно:

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>-2; \end{array}\right. \quad (5) \Leftrightarrow a<-\frac{8}{5}; \quad \left\{\begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ -2<a<-\frac{8}{5}; \end{array}\right.$$

$$(6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1, \\ a>6; \end{array}\right. \quad (7) \Leftrightarrow a>-\frac{4}{5}; \quad \left\{\begin{array}{l} (6) \\ (7) \end{array}\right. \Leftrightarrow a>6;$$

$(8) \Leftrightarrow -3<a<-2$; $(9)\ -1<a<6$; $\left\{\begin{array}{l} (8) \\ (9) \end{array}\right.$ не имеет решений.

Таким образом, получаем, что совокупность (F) равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{-30-2\sqrt{15}}{21}<a<\dfrac{-30+2\sqrt{15}}{21}, \\ a<-3, \\ -2<a<-\dfrac{8}{5}, \\ a>6. \end{array}\right.$$

Чтобы упростить ответ, придется сравнить некоторые числа. Выясним, например, будет ли $\dfrac{-30-2\sqrt{15}}{21}>-3$:

$$\frac{-30-2\sqrt{15}}{21}>-3 \Leftrightarrow -30-2\sqrt{15}>-63 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{15}>-33 \Leftrightarrow 2\sqrt{15}<33 \Leftrightarrow 4\cdot 15<33^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60<3^2\cdot 11^2=9\cdot 121$$

(верное неравенство, значит, исходное — также верное).

Будет ли $\frac{-30-2\sqrt{15}}{21} \leqslant -2$?

$$\frac{-30-2\sqrt{15}}{21} \leqslant -2 \Leftrightarrow -30-2\sqrt{15} \leqslant$$

$$\leqslant -42 \Leftrightarrow -2\sqrt{15} \leqslant -12 \Leftrightarrow \sqrt{15} \geqslant 6 \Leftrightarrow 15 \geqslant 36$$

(неверное неравенство, значит, и исходное неравенство неверно). Таким образом, $\frac{-30-2\sqrt{15}}{21} > -2$.

Выясним, будет ли $\frac{-30-2\sqrt{15}}{21} < -\frac{8}{5}$:

$$\frac{-30-2\sqrt{15}}{21} < -\frac{8}{5} \Leftrightarrow -30-2\sqrt{15} < -\frac{168}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{5} < -\frac{168}{5} + 30 = -\frac{18}{5} \Leftrightarrow \sqrt{15} > \frac{9}{5} \Leftrightarrow 15 > \frac{81}{25}$$

(верное неравенство). Таким же образом убеждаемся, что $\frac{-30+2\sqrt{15}}{21} > -\frac{8}{5}$. Далее, очевидно, что $\frac{-30+2\sqrt{15}}{21} < \frac{2\sqrt{15}}{21} < \frac{8}{21} < 6$.

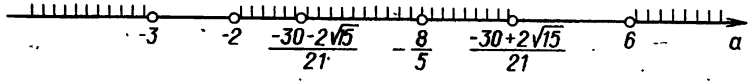


Рис. 26

Расставив теперь полученные значения на числовой прямой (рис. 26), мы видим, что исходная совокупность равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a < -3, \\ -2 < a < \dfrac{-30+2\sqrt{15}}{21}, \\ a > 6. \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in]-\infty, -3[\cup]-2; \frac{-30+2\sqrt{15}}{21}[\cup]6; +\infty[$.

Пример 8. При каких h уравнение $x^4+(h-1)x^3+x^2+(h-1)x+1=0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней?

Решение. Заметим, что $x=0$ не является корнем нашего уравнения, поэтому, поделив обе части этого уравнения

на x^2, мы получим равносильное ему уравнение:

$$x^2+(h-1)x+1+(h-1)\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+(h-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0. \qquad (1)$$

Обозначим $y=x+\frac{1}{x}$, тогда $y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$; следовательно, $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. В новых обозначениях уравнение (1) имеет вид

$$y^2-2+(h-1)y+1=0\Leftrightarrow y^2+(h-1)y-1=0. \qquad (2)$$

Теперь заметим, что уравнение (2) имеет корни разных знаков, так как квадратный трехчлен $f(y)=y^2+(h-1)y-1$ в нуле отрицателен $f(0)=-1$. Далее, при каждом y уравнение $x+\frac{1}{x}=y$ если имеет корни, то того же знака, что и y. При отрицательном y уравнение $x+\frac{1}{x}=y$ имеет два отрицательных корня тогда и только тогда, когда $y\leqslant -2$. Действительно,

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}=y, \\ y<0, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{x^2-yx+1}{x}=0, \\ y<0; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-yx+1=0, \\ x\neq 0, \\ y<0, \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-yx+1=0, & (3) \\ y<0; & (4) \end{cases}$$

так как $x=0$ не является корнем (3).

Чтобы уравнение (3) имело два корня, необходимо и достаточно, чтобы $D=y^2-4>0$, т. е. либо $y<-2$, либо $y>2$. Отсюда, так как $y<0$ (условие (4)), получаем, что для того чтобы система (3)—(4) имела два отрицательных корня, необходимо и достаточно, чтобы y был меньше — 2. Итак, исходная задача может быть сформулирована так:

«при каких h меньший корень уравнения

$$f(y)=y^2+(h-1)y-1=0$$

меньше — 2?»

Это условие, как уже говорилось выше, равносильно условию

$$f(-2)<0\Leftrightarrow(-2)^2+(h-1)(-2)-1<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2h>4+2-1\Leftrightarrow h>\frac{5}{2}.$$

Ответ: $h > \frac{5}{2}$.

Наконец, следует отметить такие задачи с параметрами, решение которых сильно упрощается, если найти сначала некоторые необходимые условия.

Пример 9. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2\sqrt{6-x}) = \log_{2+a^2}(3-\sqrt{x-1})$$

при любых действительных a.

Решение. Заметим, что если x — корень уравнения при всех a, то он является корнем и при $a=0$ (значении параметра, при котором уравнение существенно упрощается). При $a=0$ имеем

$$\log_2(\sqrt{6-x}) = \log_2(3-\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x = (3-\sqrt{x-1})^2 \\ 3-\sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x-1} = x+1 \\ 3 > \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-9 = (x+1)^2 \\ x+1 \geqslant 0 \\ 10 > x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10=0 \\ 1 \leqslant x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Итак, мы получили необходимое условие на x: x может равняться 5 или 2 (иначе уже при $a=0$ неравенство не выполняется). Это условие необходимо, но не достаточно! Поэтому рассмотрим два случая.

а) Подставим $x=2$ в исходное уравнение:

$$\log_2(8a^2 - 20a^2 + \sqrt{6-2}) = \log_{2+a^2}(3-\sqrt{2-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2-12a^2) = \log_{2+a^2}2.$$

Последнее уравнение явно не может выполняться при всех действительных a, например при $a=1$ (проверьте!). Это означает, что $x=2$ не является корнем при $a=1$ и, значит, не является корнем при всех a.

б) Подставим $x=5$ в исходное уравнение:

$$\log_2(125a^2 - 125a^2 + \sqrt{6-5}) =$$

$$= \log_{2+a^2}(3-\sqrt{5-1}) \Leftrightarrow \log_2 1 = \log_{2+a^2}1.$$

Последнее равенство выполняется, конечно, при всех a.

Ответ: $x=5$.

Еще раз отметим основные этапы решения:

1) при $a=0$, $x=2$ или $x=5$; это означает, что любое

другое значение не может быть корнем *при всех* a, хотя бы потому, что оно не является корнем при $a=0$;

2) $x=2$ не является корнем при $a=1$, значит, не может быть корнем при всех a;

3) подстановка $x=5$ в уравнение приводит к очевидному тождеству.

Сравните этот пример с примером 4 этого параграфа.

Пример 10. При каких a система

$$(S)\ \begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x; y)$?

Решение. Заметим, что если $(x; y)$ — решение системы, то и $(-x; y)$ также будет решением, поскольку $|-x| = |x|$, $\cos(-x) = \cos x$ и $\sin^2(-x) = \sin^2 x$. Для того чтобы решение было единственным, необходимо, чтобы точки $(x; y)$ и $(-x; y)$ совпали, т. е. чтобы $x = -x$. Отсюда получаем, что x должен быть равен нулю! Подставив $x=0$ в систему (S), получаем

$$\begin{cases} a = y+1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ a = 2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = -1, \\ a = 0. \end{cases}$$

Таким образом, a может принимать только значения 2 и 0. Это необходимое, но не достаточное условие! Иными словами, мы показали, что если система имеет единственное решение, то $a=2$ или $a=0$. Обратное может быть неверным. Поэтому рассмотрим оба случая.

а) Подставим $a=0$ в систему (S):

$$\begin{cases} 0 = y + \cos x \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\cos x \\ y^2 = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow y = -\cos x.$$

Мы получим уравнение, имеющее бесконечное множество решений (это множество решений — график функции $y = -\cos x$).

б) Подставим $a=2$ в систему (S):

$$\begin{cases} 2(|x|+1) = y + \cos x \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 2|x| - \cos x \\ y^2 = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \cos x \\ y = 2 + 2|x| - \cos x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \cos x \\ \cos x = 2 + 2|x| - \cos x \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\cos x \\ -\cos x = 2 + 2|x| - \cos x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = \cos x, & (1) \\ 2 - 2\cos x + 2|x| = 0; & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\cos x, & (3) \\ 2 + 2|x| = 0. & (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

Теперь заметим, что уравнение (4) не имеет решений, так как $2+2|x|\geqslant 2$; поэтому система (3)—(4) не имеет решений. Далее, в левой части уравнения (2) $2-2\cos x\geqslant 0$, и $2|x|\geqslant 0$, поэтому $2-2\cos x+2|x|=0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2-2\cos x=0 \\ 2|x|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0;$$

при этом $y=\cos 0=1$. Следовательно, при $a=2$ система (S) имеет единственное решение $(0, 1)$.

Ответ: $a=2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

§ 1. ФУНКЦИИ, ОТНОШЕНИЯ, ГРАФИКИ

1. Какими преобразованиями получается график функции:

а) $y = 2x^2 + 4x - 10$ из графика функции $y = x^2 + 1$?
б) $y = 8 \cdot 4^x$ из $y = 2^x$?
в) $y = \log_2 x^3$ из $y = \log_2 x$?
г) $y = \lg x^4$ из $y = \lg |x|$?
д) $y = \lg (4x^2 - 40x + 100)$ из $y = \lg |x|$?
е) $y = \sin x + \cos x$ из $y = \sin x$?
ж) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ из $y = \sin^2 x$?

2. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}.$$

Ответ: $]-\infty; 0[\cup [2; 3]$.

3. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \lg (x-1)} + \sqrt{\frac{4-x}{x+2}}.$$

Ответ: $]1; 4]$.

4. Найти область определения функции

$$y = \frac{x^2}{\lg (x-2)} - \sqrt{9-x}.$$

Ответ: $]2; 3[\cup]3; 9]$.

5. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg (x+10)^2}.$$

Ответ: $]-\infty; -11[\cup]-11; -10[\cup]-10; -9[\cup]-9; 2] \cup [3; +\infty[$.

6. (МИСИ). Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\lg (3x^2 - 2x)}.$$

Ответ: $]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]1; +\infty[$.

7. (БГУ). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{0,4}(x - x^2)}.$$

Ответ: $]0; 1[$.

8. (БГУ). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2 - 1}}.$$

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

9. (МИСиС). Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{0,5}(3x - 8) - \log_{0,5}(x^2 + 4)}.$$

Ответ: $]\frac{8}{3}; +\infty[$.

10. (ЛГПИ). Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}.$$

Ответ: $[4 - \sqrt{2}; 3[\cup [4 + \sqrt{2}; +\infty[$.

11. (МЭИ). Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt[4]{\log^3_{0,2} x + (\log_{0,2} x^3) \cdot (\log_{0,2} 0{,}0016) + 36}.$$

Ответ: $]0; 125]$.

12. (МЭИ). Найти область определения функции

$$f(x) = \lg\left(\sqrt{8^{-2+\lg x}} - \sqrt[3]{4^{2-\lg x}}\right).$$

Ответ: $]100; +\infty[$.

13. (ЛКИ). Найти область определения функции

$$y = (2x + 8 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + \log_{0,3}(x - 1).$$

Ответ: $]1; 4[$.

14. Изобразить графики функций:

а) $y = ||x - 2| - 1|$;
б) $y = |x^2 - 3x + 2| + |x - 3|$;
в) $y = |x - 2| + ||x| - 1|$;
г) $y = |x + 1| + |x^2 - 1| - x^2$;
д) $y = |x^2 - 2x + 3| + |x^2 + 2x - 8|$.

15. Изобразить графики функций:

а) $y = x + \frac{1}{x}$;

б) $y = \frac{1+x}{1-x}$;

в) $y = \frac{x^2}{|x|-1}$;

г) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$;

д) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

е) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

ж) $y = \sqrt{x^2 - x}$;

з) $y = \sqrt{25 - (x+2)^2} + 2$.

16. Изобразить графики функций:

а) $y = \lg(x^2)$;

б) $y = |\ln|x||$;

в) $y = \lg(|x| + x + 1)$;

г) $y = |3\lg x - 1|$;

д) $y = 3|\lg x| - 1$;

е) $y = \frac{\ln x}{x}$;

ж) $y = \lg\frac{1}{x^2+1}$;

з) $y = \lg_{|x|} 2$.

17. Изобразить графики функций:

а) $y = 2^{\frac{\sqrt{x^2}}{x}}$;

б) $y = 2^{\frac{1}{x}}$;

в) $y = e^{-x} \cdot x^2$.

18. Изобразить графики функций:

а) $y = |\sin x|$;

б) $y = \sin^2 x$;

в) $y = \sin\sqrt{x}$;

г) $y = \sin(x^2)$;

д) $y = \sin x - \sin|x|$;

е) $y = |\sin x| + \cos x$;

ж) $y = \lg\sin x$;

з) $y = \sin(\operatorname{tg} x)$.

19. Изобразить на одном чертеже графики функций и сравнить их:

а) $y = x^2$; $y = x^4$; $y = x^6$; $y = x^3$; $y = x^5$;

б) $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = \sqrt[4]{x}$;

в) $y = |\sin x|$; $y = \sin^2 x$; $y = |\sin^3 x|$; $y = \sqrt{|\sin x|}$.

20. Какими преобразованиями получается график соотношения:

а) $(x-1)^2+(y+3)^2\leqslant 2$ из графика соотношения $x^2+y^2\leqslant 2$?
б) $4x^2+9y^2=16$ из $x^2+y^2=16$?
в) $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+4)^2}{25}=1$ из $x^2+y^2=1$?
г) $f(a(x-x_0), b(y-y_0))=0$ из $f(x, y)=0$?

21. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению:
а) $|y|=|x|$;
б) $|x|+|y|=1$;
в) $|x-y|+|x+y|=1$;
г) $2|x-2|+3|x+4|=1$;
д) $|x-y|+|y|=1$;
е) $|y-x|=x+1$;
ж) $|y|=|x^2-2x|$;
з) $||y|-|x||=1$;
и) $(|x-y|+x-y)^2+(|x+y|+x+y)^2=1$;
к) $x^3-4x^2y+3xy^2=0$;
л) $|y|=\sin x$;
м) $|x^2-y^2|+(x^2-y-1)^2=0$;
н) $x=|x-\sin y|$;
о) $\sin x=\sin y$;
п) $\sin(x-y)=0$;
р) $\sin|x-y|+\cos|x-y|=0$.

22. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению:
а) $|y|>|x+1|$;
б) $|x|+|y|\geqslant 2$;
в) $|y-1|\geqslant|x+2|$;
г) $(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\leqslant 0$;
д) $(x+|y|)(x-y^2-1)\geqslant 0$;
е) $(x-y)\sin(x+y)\geqslant 0$;
ж) $|2x+3y|-|x+2y|\geqslant 1$;
з) $|x+y|+|2x-y|\leqslant 4$;
и) $|y|\leqslant\log_2|x|$;
к) $\begin{cases}|x|+y^2<1.\\ x+y>0.\end{cases}$

23. Изобразить графики соотношений:
а) $x^2+(2-3y)x+2y^2-2y<0$;
б) $x^2-2(y+2)x+y(y+4)=0$;
в) $x^2+7x+4|y-x|+y+2=0$;
г) $|x^2-y|+x^2-|y-x|-y=0$;
д) $\sin^4(x+y)+\cos^4(x+y)=1/2$;
е) $\log_2 x+\log_2 y=1$;
ж) $\log_x y=2$.

24. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{1+y}(1+\sin x)>1.$$

25. (МГУ, ф-т психологии). Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ выполнены неравенства $f(-3)<-5$, $f(-1)>0$, $f(1)<4$.

Определить знак коэффициента a.

Ответ: $a<0$.

26. (МГУ, экономический ф-т). Найти такой многочлен третьей степени $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-P_3(x)\right|\leqslant 0{,}25$$

при $|x|\leqslant 0{,}5$.

Ответ: $2(x^3-x^2+x)-1$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

1. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$(x-1)^2+|x-1|-2=0.$$

Ответ: $\{0; 2\}$.

2. (МГУ, географический ф-т). Найти все решения уравнения

$$|7x-12|-|7x-11|=1.$$

Ответ: $\left]-\infty; \frac{11}{7}\right]$.

3. (МГУ, экономический ф-т). Найти все корни уравнения

$$|x^2+x-1|=2x-1,$$

удовлетворяющие неравенству $x<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right\}$.

4. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$4\sqrt{x+1}=|2x-1|+3.$$

Ответ: $\{0; 3\}$.

5. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$2\sqrt{x+5}=x+2.$$

Ответ: $\{4\}$.

6. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt{4-6x-x^2}=x+4.$$

Ответ: $\{-1\}$.

7. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt{x+7}-x+3=0.$$

Ответ: $\left\{\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right\}$.

8. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$13x-3x^2-\frac{x}{\sqrt{x-1}}-\frac{|4-x|}{\sqrt{x-1}}+|4-x|=$$

$$=3x|4-x|-\frac{4}{\sqrt{x-1}}+4.$$

Ответ: $]1;\ 4]$.

9. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$4^x-2^{x+1}=3.$$

Ответ: $\{\log_2 3\}$.

10. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4=0.$$

Ответ: $\{-2\}$.

11. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$2^{6x}+8^{x+\frac{2}{3}}-5=0.$$

Ответ: $\{0\}$.

12. (МГУ, географический ф-т). Найти решения уравнения

$$3^{x^2+4x}=\frac{1}{25},$$

удовлетворяющие неравенству $x>-3$.

Ответ: $\{-2+\sqrt{4-2\log_3 5}\}$.

13. (МГУ, ВМК). Решить уравнение

$$9^{1-(x-1)^2}-12\cdot 3^{-(x-1)^2}+1=0.$$

Ответ: $\left\{1\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}\right\}$.

14. (МГУ, химический ф-т). Решить уравнение

$$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3};\ 1\right\}$.

15. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все действительные решения уравнения

$$4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

Ответ: $\left\{-1;\frac{2}{3}\right\}$.

16. (МГУ, филологический ф-т). Решить уравнение

$$16^{\frac{x+5}{x-7}}=512\cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

Ответ: $\left\{-5;\frac{93}{11}\right\}$.

17. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения уравнения

$$2^{|x+2|}-|2^{x+1}-2|=2^{x+1}+1.$$

Ответ: $x=-3$; $x\geqslant -1$.

18. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{x}\,(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}})=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

Ответ: $\{2;\ 9\}$.

19. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить уравнение

$$x^2\cdot 2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{\sqrt{2x+1}+1}+x^2\cdot 2^{x-2}.$$

Ответ: $x_1=2$; $x_2=4$.

20. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$6\,(0{,}75)^{2-2x-x^2}-(0{,}75)^{x^2+2x-2}=25^{\log_{125}8}-3.$$

Ответ: $\{-1\pm\sqrt{3+\log_{0,75}2}\}$.

21. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$\lg(4^{x-1}-9)-\lg 5=\lg(2^{x-1}+3)+\lg 2.$$

Ответ: $\{1+\log_2 13\}$.

22. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$2\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\lg(x-1)=\lg\left(x+\frac{5}{2}\right)+\lg 2.$$

Ответ: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

23. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\frac{1}{\log_5 2}.$$

Ответ: $x=2$.

24. (МГУ, ф-т психологии). Решить уравнение

$$2\log_3\frac{x^2}{27}-\frac{\log_3\frac{1}{x}}{\log_5\sqrt{x}}=2.$$

Ответ: $\left\{\frac{9}{\sqrt{5}}\right\}$.

25. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x-8)^2-\log_{\frac{1}{2}}(10+3x-x^2)=1.$$

Ответ: $\left\{\frac{-1+\sqrt{313}}{6};\ \frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right\}$.

26. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$9^{\log_{1/3}(x+2)}=7^{\log_{1/7}(2x^2+3x+2)}.$$

Ответ: $\{-1;\ 2\}$.

27. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$\log_3\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}=\log_9\left(\log_9\frac{x}{3}\right).$$

Ответ: $\{9\}$.

28. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$2^{\sqrt{\log_2 3}}=3^{\sqrt{\log_9 4x-0.75}}.$$

Ответ: $\{3\sqrt{3}\}$.

29. (МГУ, ВМК). Решить уравнение

$$|1-\log_{\frac{1}{6}}x|+2=|3-\log_{\frac{1}{6}}x|.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{6};\ +\infty\right[$.

30. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\log_3\left(\sqrt{x}+|\sqrt{x}-1|\right)=\log_9\left(4\sqrt{x}-3+4|\sqrt{x}-1|\right).$$

Ответ: $0\leqslant x\leqslant 1$; $x=4$.

31. (МГУ, ф-т психологии). Решить уравнение

$$\frac{x}{18}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$$

Ответ: $\left\{\frac{5}{3}; 15\right\}$.

32. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\log_7(6+7^{-x})=1+x.$$

Ответ: $\{0\}$.

33. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$4+\log_2 x^2=\log_x 64.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{8}; 2\right\}$.

34. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\left[x\cos^5\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=7\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\log_{\frac{1}{4}}2.$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{4}$; $x_2=64$.

35. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все действительные решения уравнения

$$\log_2(x^2+7)=5+\log_2 x-\frac{6}{\log_2\left(x+\frac{7}{x}\right)}.$$

Ответ: $\{1; 7\}$.

36. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$\log_{(1-2x^2)} x=\frac{1}{4}-\frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}.$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$.

37. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$3+\frac{1}{\log_{32}\left(\frac{x}{2}\right)}=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right).$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{11}}{4}\right\}$.

38. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt[3]{4\log_{25}^2 x}-3\sqrt[3]{\log_5 x}-4=0.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{5}; 5^{64}\right\}$.

39. (МГУ, химический ф-т). Решить уравнение

$$\log_{x^2+6x+8}[\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)]=0.$$

Ответ: $\{-1\}$.

40. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$\left[(\log_2 x)^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}}\right](3\log_8 x - 1) =$$

$$= 2\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)\log_2 x^2.$$

Ответ: $\{2; 8\}$.

41. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$x + 27^{\frac{5}{2}\left|\log_9 \sqrt{3}\sqrt[3]{x}\right|} = \frac{10}{3}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right\}$.

42. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$49^{2\log_4(x-2)} \cdot 7^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{12-x}} = 49^{\log_2\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)^3}} \cdot 7^{4\cdot\log_2 x}.$$

Ответ: $\{4\}$.

43. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все решения уравнения

$$x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3} - x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3) = x^2 + 2x.$$

Ответ: $\left\{-\frac{13}{5}; -2; 3\right\}$.

44. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить уравнение

$$(x+4)\log_4(x+1) - (x-4)\log_2(x-1) = \frac{8}{3}\log_2(x^2-1).$$

Ответ: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 3$.

45. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$x^4 - 12x^2 + 36 \leqslant 0.$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{6}$.

46. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{4x^2+8x-5}{x+1} < 0.$$

Ответ: $\left]-1; \frac{1}{2}\right[\cup]-\infty; -\frac{5}{2}\left[$.

47. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}.$$

Ответ: $x<1$, $x=2$.

48. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$x > \frac{1}{x-1}.$$

Ответ: $\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

49. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{3}{2-x} > \frac{1}{x+3}.$$

Ответ: $\left]-\infty; -3\right[\cup\left]-\frac{4}{7}; 2\right[$.

50. (МГУ, химический ф-т). Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$x \geqslant \frac{4-x^2}{3-x}.$$

Ответ: $\frac{4}{3} \leqslant x < 3$.

51. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$(2x^2+11x+6)(2x^2+11x+13) > 8.$$

Ответ: $]-\infty; -5[\cup]-3{,}5; -2[\cup]-0{,}5; +\infty[$.

52. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$3|x-1| \leqslant x+3.$$

Ответ: $[0; 3]$.

53. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$x^2-5|x|+6<0.$$

Ответ: $]-3; -2[\cup]2; 3[$.

54. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$x^2-2|x+1|<0.$$

Ответ: $]1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}[$.

55. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$|x^2-1|-2x<0.$$

Ответ: $]-1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}[$.

56. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$|x^2+3x|+x^2-2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

57. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$4x^2 + \sqrt[4]{14} > |x| \cdot \sqrt[4]{224} + 1.$$

Ответ: $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1-\sqrt[4]{14}}{2}; \frac{\sqrt[4]{14}-1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

58. (МГУ, ВМК). Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0.$$

Ответ: $x=-1$; $x \geqslant 2$.

59. (МГУ, химический ф-т). Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}} \leqslant 0.$$

Ответ: $-1 < x \leqslant 2$.

60. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1.$$

Ответ: $\left[-5; \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right[$.

61. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1.$$

Ответ: $]-\infty; -2] \cup \left[-1; \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right[$.

62. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0.$$

Ответ: $\left]\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; 1\right]$.

63. (МГУ, ВМК). Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2-4x} + x + 1 > 0.$$

Ответ: $\left]\frac{-3-\sqrt{7}}{2}; 0\right]$.

64. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geqslant 0.$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 81$.

65. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1.$$

Ответ: $]-1;\ 15[$.

66. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1.$$

Ответ: $[-6;\ 0[\cup]3;\ 4]$.

67. (МГУ, геологический ф-т). Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}}>\frac{1}{x-2}.$$

Ответ: $\left]-\infty;\ 2\right[\cup\left]\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 3\right[$.

68. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{9-\frac{9}{x}}<x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}.$$

Ответ: $\left[3;\ \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{37}}{2};\ +\infty\right[$.

69. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

Ответ: $\left[-5;\ -4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right[$.

70. (МГУ, химический ф-т). Верно ли, что всякое решение неравенства $\log_2(8+8x-5x^2)>2$ будет решением неравенства $\log_2(2+2x-x^2)>0$?

Ответ: Верно.

71. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0.$$

Ответ: $]-\infty;\ 2{,}5[\cup]\log_2 6;\ 3[$.

72. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить неравенство

$$4^x-3\cdot 2^x<4.$$

Ответ: $]-\infty;\ 2[$.

73. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$9^x-10\cdot 3^x+9\leqslant 0.$$

Ответ: $[0;\ 2]$.

74. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить неравенство

$$2\cdot 4^x+4<33\cdot 2^{x-1}.$$

Ответ: $]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]1; +\infty[$.

75. (МГУ, геологический ф-т). Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$81^x - 9^{x+1} < 4\log_3 \frac{1}{9}.$$

Ответ: $0<x<\log_9 8$.

76. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geqslant 49^{x^2+5x-49}.$$

Ответ: $[-10; 5]$.

77. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$3\cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}.$$

Ответ: $]-2-\log_2^2 3; 2]$.

78. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}}\cdot\frac{28}{3}.$$

Ответ: $]-\sqrt{7}; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; \sqrt{7}[$.

79. (МГУ, ВМК). Решить неравенство

$$2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left[\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$.

80. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{2^x + x - 10}{2^x - 8} \leqslant 1.$$

Ответ: $[2; 3[$.

81. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{4 - 7\cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12\cdot 5^x + 4} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left]\log_5 \frac{2}{5}; \log_5 \frac{4}{5}\right] \cup]\log_5 2; +\infty[$.

82. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{7}{9^x - 2} \geqslant \frac{2}{3^x - 1}.$$

Ответ: $\left[-\log_3 2; 0\right[\cup\left]\frac{1}{2}\log_3 2; 1\right]$.

83. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}(17^x-8)} \leqslant \sqrt{17^x+15}-\sqrt{\frac{1}{2}(17^x+8)}.$$

Ответ: $[\log_{17}8;\ 1]$.

84. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}-4^{\sqrt{3-x}}}+2^{\sqrt{3-x}+1}>5.$$

Ответ: $[-1;\ 3[$.

85. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$3^{3x-2\sqrt{x+1}}-7\cdot 3^{2x}<18\cdot 3^{x+2\sqrt{x+1}}.$$

Ответ: $[-1;\ 8[$.

86. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$4x+8\sqrt{2-x^2}>4+(x^2-x)2^x+2^{x+1}\cdot x\sqrt{2-x^2}.$$

Ответ: $]-1;\ \sqrt{2}]$.

87. (МГУ, геологический ф-т). Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x+3)>\log_9 27.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}<x<-\frac{23}{16}$.

88. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\lg(x-2)+\lg(x+2)<\lg(4x+1).$$

Ответ: $]2;\ 5[$.

89. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_2(2-x)-\log_2(x-1)>\log_{\sqrt{2}}3.$$

Ответ: $]1;\ 1{,}1[$.

90. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$1-2\log_{\frac{1}{9}}(x+2)>\log_3(x-3).$$

Ответ: $]3;\ +\infty[$.

91. (МГУ, географический ф-т). Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{4x^2+12x+5}{\log_6\left(x+2x+\frac{7}{16}\right)}>0.$$

Ответ: $]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{9}{4}; -\frac{7}{4}[\cup]\frac{1}{4}; +\infty[$.

92. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_3 \log_{\frac{9}{16}} (x^2 - 4x + 3) \leqslant 0.$$

Ответ. $]+2-\sqrt{2}; \frac{3}{4}] \cup [\frac{13}{14}; 2+\sqrt{2}[$.

93. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$2\log_{\frac{1}{2}} (x-2) - \log_{\frac{1}{2}} (x^3 - x + 2) \geqslant 1.$$

Ответ: $2 < x \leqslant 6$.

94. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить неравенство

$$2\log_3(2x^2+x-1) > \log_3 4.$$

Ответ: $]-2; 3[$.

95. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_2^2 (x - x^2 + 2) + 3\log_{\frac{1}{2}} (x - x^2 + 2) + 2 \leqslant 0.$$

Ответ: $[0; 1]$.

96. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить неравенство

$$\log^2_3 x + \log_3 x \geqslant 2.$$

Ответ: $]0; \frac{1}{9}] \cup [3; +\infty[$.

97. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{100} x^2 + \log^2_{10} x < 2.$$

Ответ: $]0{,}01; 10[$.

99. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$(\lg x)^4 - 5(\lg x)^2 + 6 < 0.$$

Ответ: $]10^{-\sqrt{3}}; 10^{-\sqrt{2}}[\cup]10^{\sqrt{2}}; 10^{\sqrt{3}}[$.

99. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$2\log_4(2x^2+3) < \log_2(x^2+6).$$

Ответ: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

100. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 6) + \log_9 x^2 \geqslant 0.$$

Ответ: $[-3; -\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6}; 3]$.

101. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$|\lg|x-1|+2|\geqslant 3.$$

Ответ: $x\leqslant -9$; $1-10^{-5}\leqslant x<1$;

$$1<x\leqslant 1+10^{-5};\ x\geqslant 11.$$

102. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2).$$

Ответ: $\left]-1;\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[1;\ \frac{7}{3}\right[$.

103. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{1+\log_2(7x^2+14x+8)}\leqslant 1+\log_8(7x^2+14x+8).$$

Ответ: $x\leqslant -2$; $x=-1$; $x\geqslant 0$.

104. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1}-25^x)\geqslant -2.$$

Ответ: $]-\infty;\ \log_5 2]\cup[\log_5 3;\ 1[$.

105. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$\log_3(3^{4x}-3^{2x+1}+3)<2\log_9 7.$$

Ответ: $\left]-\infty;\ \frac{\log_3 4}{2}\right[$.

106. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$\log_4(5-3^x)\cdot\log_2\left(\frac{5-3^x}{8}\right)\geqslant -1.$$

Ответ: $]-\infty;\ 0]\cup[1;\ \log_3 5[$.

107. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{2\lg x+110}{\lg x+10}>1.$$

Ответ: $]0;\ 10^{-100}]\cup]10^{-10};\ +\infty[$.

108. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{\log_{10}(4x^2+x)}{\log_{10}2x}\geqslant 1.$$

Ответ: $\left[0;\ \frac{1}{4}\right]\cup\left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

109. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x+1}}{\log_{\frac{1}{4}}(x-1)}\leqslant 1.$$

Ответ: $]1; 2[\cup[3; +\infty[$.

110. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_2 (1+2x)} \leqslant \frac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}.$$

Ответ: $\left]0; \frac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$.

111. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$$

Ответ: $]0; 2[\cup]4; +\infty[$.

112. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить неравенство

$$\log_{x-1}(1+2x^4-x^6) < 0.$$

Ответ: $]1; \sqrt{2}[$.

113. (МГУ, ВМК). Решить неравенство

$$\log_{2x-\frac{4}{25}}\left(\frac{x^2-14x+51}{50}\right) \leqslant 0.$$

Ответ: $]0{,}58; 7+4\sqrt{3}]$.

114. (МГУ, геологический ф-т). Найти все действительные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_x\left[\frac{2x+5}{4(x-1)}\right] < 0.$$

Ответ: $]4{,}5; +\infty[$.

115. (МГУ, географический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\log_2 x}}(4x^2-20x+22) < 0.$$

Ответ: $\left]\frac{3}{2}; \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$.

116. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}|16x-3| < 0.$$

Ответ: $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right[\cup\left]\frac{1}{4}; 1\right[$.

117. (МГУ, филологический ф-т). Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$2\log_3 x - \log_x 27 < 5.$$

Ответ: $\left]0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]1; 27\right[$.

118. (МГУ, физический ф-т). Решить неравенство

$$2\log_5 \sqrt{x} - 2 \geqslant \log_x \left(\frac{1}{5}\right).$$

Ответ: $]1; +\infty[$.

119. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{10-x}\left(\frac{19}{2} - x\right)^2 > 2\log_{x-9}(x-9).$$

Ответ: $\left]9; \frac{19}{2}\right[\cup \left]\frac{19}{2}; \frac{39}{4}\right[$.

120. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{9x^2-6x+1} \frac{1}{9x^2 - 18x + 8} < -1.$$

Ответ: $\left]-\infty; 0\right[\cup \left]\frac{7}{12}; \frac{2}{3}\right[$.

121. (МГУ, ф-т психологии). Решить неравенство

$$\log_{(x-2)} \frac{1}{5} \geqslant \log_{\frac{x-3}{x-5}} \frac{1}{5}.$$

Ответ: $[4-\sqrt{3}; 3[\cup [4+\sqrt{3}; +\infty[$.

122. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_x \frac{1}{7} + \log_{\frac{1}{7}} x > 10\left|\log_{\frac{1}{7}} x\right|.$$

Ответ: $\left]\frac{1}{\sqrt[3]{7}}; 1\right[$.

123. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{\log_x (3\sqrt[3]{x}) + 1} > \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} x}.$$

Ответ: $]0; 3^{-0,75}] \cup \left]3 \frac{\sqrt{21}-3}{8}; +\infty\right[$.

124. (МГУ, геологический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{10}|2x+3|^3 + 2\log_{(2x+3)^2} 10 < 3.$$

Ответ: $\left]-\frac{3}{2}; -1\right[\cup \left]\frac{\sqrt[3]{10}-3}{2}; \frac{\sqrt[3]{100}-3}{2}\right[$.

125. (МГУ, химический ф-т). Найти все решения системы

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3 \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

Ответ: (4; —3; 0); (2; —1; 2).

126. (МГУ, экономический ф-т). Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 18x^2y^2-4x^2y^3-3x^2y^3=0, \\ 12y^2-2xy^2+3y^3=0. \end{cases}$$

Ответ: Прямая $y=0$ и точки $(0; -4)$ и $\left(5; -\frac{2}{3}\right)$.

127. (МГУ, экономический ф-т). Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (1-x)(x+y+3)(2x-y)=0, \\ (x-1)(3x+3y+1)=0. \end{cases}$$

Ответ: Точки прямой $x=1$ и точка $\left(-\frac{1}{9}; -\frac{2}{9}\right)$.

128. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$$

Ответ: (3; 3; 3).

129. (МГУ, ВМК). Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\begin{cases} |x-5|=3+|x-2|, \\ 1186-199x \leqslant 197x^2. \end{cases}$$

Ответ: $x=2$; $x \leqslant -3\frac{2}{197}$.

130. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения системы

$$\begin{cases} y^2-|xy|+2=0, \\ 8-x^2=(x+2y)^2. \end{cases}$$

Ответ: $(2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

131. (МГУ, химический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6. \end{cases}$$

Ответ: (0; 1).

132. (МГУ, геологический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3-\sqrt{-1-y}=\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{x+y}+2=\sqrt{-3+x}. \end{cases}$$

Ответ: $(74-14\sqrt{22};\ -27+4\sqrt{22})$.

133. (МГУ, геологический ф-т). Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5^{3t}-5^{2t}-6\cdot 5^t>0, \\ 2\cdot 5^{3t}+5^{t+1}-12>0. \end{cases}$$

Ответ: $t>\log_5 3$.

134. (МГУ, химический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cdot 3^x+2^{y-1}=12{,}5, \\ 3^{2x+1}+2^y=28. \end{cases}$$

Ответ: $x=1$; $y=0$.

135. (МГУ, физический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{\frac{x^2-y}{2}}+3^x\cdot 3^{-y}=12, \\ 3^x+3^{-y}=10. \end{cases}$$

Ответ: (0; —2); (2; 0).

136. (МГУ, географический ф-т). Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1}=4y^2+1, \\ 2^x\leqslant 2y. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0,5).

137. (МГУ, экономический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{y+4x}=y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)}, \\ x^3=y^{-1}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(2;\ \frac{1}{8}\right)$.

138. (МГУ, географический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{y-x}=\frac{1}{2^{x+2}}, \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+2y+5}=\sqrt{2x+2y+4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};\ 3\right)$.

139. (МГУ, геологический ф-т). Решить систему

$$\begin{cases} \lg 3\cdot\lg(3x)=\lg 2\cdot\lg(2y), \\ \lg x\cdot\lg 2=\lg y\cdot\lg 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$.

140. (МГУ, геологический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_3 y^2=0, \\ \log_2 x^2-\log_{\frac{1}{3}} y=5. \end{cases}$$

Ответ: $\left(8\sqrt[3]{2};\ \right)\frac{1}{3\sqrt[3]{9}}$.

141. (МГУ, ВМК). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x-\log_2 y=2, \\ 2^x\cdot\log_2 y=1. \end{cases}$$

Ответ: (0; 2).

142. (МГУ, экономический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3+\log_x(1-y)}=\log_x x(1-y), \\ xy=-6. \end{cases}$$

Ответ: (3; —2).

143. (МГУ, ВМК). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\lg\sqrt{x}+3\cdot 2^y=5, \\ 10\lg x+3\cdot 4^y=17. \end{cases}$$

Ответ: $x=10^{-\frac{\sqrt{26}}{3}}$; $y=\log_2\frac{5+\sqrt{26}}{3}$.

144. (МГУ, географический ф-т). Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 4\log_2^2 x+1=2\log_2 y, \\ \log_2 x^2\geqslant\log_2 y. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2}; 2)$.

145. (МГУ, географический ф-т). Найти все решения системы

$$\begin{cases} \log_9 (x^2 + 2) + \log_{81} (y^2 + 9) = 2, \\ 2 \log_4 (x + y) - \log_2 (x - y) = 0. \end{cases}$$

Ответ: (5; 0).

146. (МГУ, экономический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 (2 \log_{y^2} x + \log_{\frac{1}{x}} y) = 3, \\ xy = 27. \end{cases}$$

Ответ: (9; 3), $\left(\frac{1}{27}; 729\right)$.

147. (МГУ, ф-т психологии). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{|xy|} (x - y) = 1, \\ 2 \log_5 |xy| \cdot \log_{|xy|} (x + y) = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

148. (МГУ, филологический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2 - \log_2 3}; \frac{2}{2 - \log_2 3}\right)$.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. (МГУ, филологический ф-т). Не пользуясь таблицами, доказать, что

$$\operatorname{tg} 208^0 < \sin 492^0.$$

2. (МГУ, экономический ф-т). Проверить справедливость равенства

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^0}{1 + \operatorname{tg}^2 15^0} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. (МГУ, ф-т почвоведения). Доказать без помощи таблиц, что

$$\operatorname{tg} 50^0 + 2 \operatorname{ctg} 50^0 + \frac{\cos 3{,}4}{\operatorname{tg} 50^0} < 4.$$

4. (МГУ, физический ф-т). Вычислить без помощи таблиц

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

5. (МГУ, филологический ф-т). Найти без таблиц $\sin\frac{\alpha}{2}$, если

$$\cos\alpha=-\frac{4}{5}\text{ и }\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

Ответ: $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{10}}$.

6. (МГУ, филологический ф-т). Найти без таблиц $\operatorname{tg}2\alpha$, если

$$\sin\alpha=\frac{1}{4}\text{ и }0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\sqrt{15}}{7}$.

7. (МГУ, биологический ф-т). Упростить выражение

$$\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{ctg}(70°-x)+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{ctg}(20°-x)-$$
$$-\operatorname{ctg}(20°-x)\cdot\operatorname{ctg}(70°-x).$$

Ответ: -1, при $x\neq45°+90°\cdot n$, $x\neq20°+180°\cdot n$,
$x\neq70°+180°\cdot n$, $n\in\mathbf{Z}$.

8. (МГУ, физический ф-т). Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\sqrt{\operatorname{tg}x}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

9. (МГУ, механико-математический ф-т). Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$, удовлетворяющие равенству

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos x+\sin 6x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos 3x+\sin 8x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{6}$; $x_3 = -\frac{7\pi}{18}$.

10. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}$.

11. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}$.

12. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0.$$

Ответ: $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}$.

13. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

14. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$2\sin x + \operatorname{tg} x = 0.$$

Ответ: $x = \pi \cdot n;\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}$.

15. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$3\cos x + 2\sin 2x = 0.$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ \ x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

16. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$2\sin x + 3\cos 2x - 3 = 0.$$

Ответ:

$$x = \pi \cdot n;\ x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

17. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0.$$

Ответ: $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}$.

18. (МГУ, географический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sin 2x - \cos x + 2 \sin x = 1,$$

удовлетворяющие условию $0 < x < 5$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{5\pi}{6};\ x_3 = \pi$.

19. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$|\sin x| = \sin x + 2 \cos x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$.

20. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}.$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

21. (МГУ, филологический ф-т). Найти наименьший положительный корень уравнения

$$\sin \pi x^2 = \sin \pi (x^2 + 2x).$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

22. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 x}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}$.

23. (МГУ, ВМК). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\cos (x + 1)} = \sqrt{\cos x},$$

удовлетворяющие условию

$$0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Ответ: $x = 2\pi - \frac{1}{2}$.

24. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2} \sin x = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$.

25. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0.$$

Ответ: $x=\pi\cdot n;\ x=\frac{5\pi}{4}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$

26. (МГУ, ф-т психологии). Решить уравнение

$$2\operatorname{tg}^2x+4\cos^2x=7.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$

27. (МГУ, филологический ф-т). Решить уравнение

$$5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0.$$

Ответ: $x=\frac{\pi\cdot n}{3};\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$

28. (МГУ, филологический ф-т). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\frac{2\operatorname{ctg}x+3}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Ответ:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n;\ x=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

29. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$2\cos^4x+1=3\cos 2x.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cdot k}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$

30. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$8\sin^4x+13\cos 2x=7.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$

31. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$(x-2)^2|\cos x|=\cos x.$$

Ответ: $x=1;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$

32. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0.$$

Ответ: $x=5;\ x=\pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$

33. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$3\operatorname{tg} x = 2\sqrt{5}\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

Ответ:

$$x = (-1)^n\cdot 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi;\ x = \pi + 2n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

34. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$(2\cos x - \sin x - 2)(\sin x - 1) = \cos^2 x.$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n;\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

35. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все корни уравнения

$$\sin^2 6x + 5\sin^2 3x = 2.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{9}(6k\pm 1),\ k\in\mathbf{Z}.$

36. (МГУ, ф-т, почвоведения). Найти все корни уравнения

$$\sin^2 6x + 5\sin^2 3x = 2.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{18}(6k\pm 1),\ k\in\mathbf{Z}.$

37. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все пары чисел, для которых выполнено равенство

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

Ответ: $(x,\ y)\in\left\{\left(1;\ \ 1-\frac{\pi}{2}+n\pi\right),\ n\in\mathbf{Z}\right\}.$

38. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$(\cos x - \sin x)\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \sin x = 2\cos^2 x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$

39. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все решения уравнения

$$\frac{2(\cos x + \sin x) + 1 - \cos 2x}{2(1+\sin x)} = \sqrt{3} + \sin x.$$

Ответ; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot k,\ k\in Z.$

40. (МГУ, географический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sin 3x - \sqrt{3}\cdot\cos 2x - \sin x = 0.$$

Ответ:

$$x = \frac{2n+1}{4}\pi;\ x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{3} + \pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

41. (МГУ, географический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sin\frac{x}{2} - \sqrt{2}\sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2} = 0.$$

Ответ:

$$x = \frac{2\pi\cdot k}{3};\ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

42. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos x\cdot\cos 3x = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$

43. (МГУ, географический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\cos 3x + \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cdot\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ:

$$x = \pi\cdot n,\ x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\pi\cdot n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$$

44. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$1 - \sin 2x = -(\sin x + \cos x).$$

Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\cdot\pi;\ x = \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

45. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$4\cos 4x + 6\sin^2 2x + 5\cos 2x = 0.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$

46. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\cos 2x = 2\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x.$$

Ответ: $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}$.

47. (МГУ, геологический ф-т). Найти все действительные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$-5 \cos 4x = 2 \cos^2 x + 1.$$

Ответ:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n;\quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{3}{5}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

48. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$2 \sin^2 \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sin (3 + 2x) +$$

$$+ 2 \sin^2 \left(4x - \frac{3}{2}\right) \cos \left(6x + \frac{3}{2}\right).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} + \frac{k\pi}{6};\ x = \frac{3}{8} + \frac{l\pi}{4};$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{3}{8} + \frac{m\pi}{2},\ k,\ l,\ m \in \mathbf{Z}.$$

49. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$\cos (3x) + \sin (7x) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - 2 \cos^2 \left(\frac{9x}{2}\right).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi \cdot k}{6};\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi \cdot k}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$

50. (МГУ, геологический ф-т). Решить уравнение

$$\sin^2 (1{,}5x) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2{,}5x\right) = \sin^2 (5{,}5x) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 6{,}5x\right).$$

Ответ: $x = \frac{k \cdot \pi}{4};\ x = \frac{\pi}{32} + \frac{k \cdot \pi}{8},\ k \in \mathbf{Z}.$

51. (МГУ, биологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sin^2 2x - \cos^2 x + \frac{3}{4} = 0.$$

Ответ: $x = \pi \cdot n \pm \arccos \sqrt{\frac{3 + \sqrt{21}}{8}},\ n \in \mathbf{Z}.$

52. (МГУ, биологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\cos 2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$

53. (МГУ, биологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2.$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

54. (МГУ, биологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sin^4x+5\cos 2x+4=0.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

55. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$2\cos 2x-1=(2\cos 2x+1)\operatorname{tg}x.$$

Ответ:

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi\cdot k;\ x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi\cdot k}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$$

56. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right)+3\sin\left(\frac{x}{12}-\frac{\pi}{16}\right).$$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{12}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{4\pi}{3}+4\pi\cdot n;$

$$x=-\frac{5}{4}\pi+12\pi\cdot k,\ n,\ k\in\mathbf{Z}.$$

57. (МГУ, химический ф-т). Найти все решения уравнения

$$9\cos^4x-\sin^4x=2\sin^22x.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$

58. (МГУ, химический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sin 2x+\sin 6x=3\cos^22x.$$

Ответ:

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\cdot\pi}{2};\ x=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$$

59. (МГУ, химический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sqrt{\sin 2x}}+\sqrt{1-\sqrt{\sin 2x}}=$$
$$=\sqrt{1+\sqrt{\cos x}}+\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}$.

60. (МГУ, химический ф-т). Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sqrt{2}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x=-\frac{2}{3}\pi+2k\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

61. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos 2x}=2+\operatorname{tg} 2x.$$

Ответ: $x=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}$.

62. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=4\sin x.$$

Ответ: $x=\pi\cdot n;\ x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi\cdot n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$.

63. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\cos x+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}=1.$$

Ответ: $x=\frac{4\pi\cdot n}{3};\ x=\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi\cdot n}{5},\ n\in\mathbf{Z}$.

64. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\cos 2x+4\sin^3 x=1.$$

Ответ: $x=\pi\cdot n;\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}$.

65. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$1+2\sin^5 3x=\cos 6x.$$

Ответ: $x=\frac{\pi\cdot n}{3};\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi\cdot n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$.

66. (МГУ, ф-т психологии). Решить уравнение

$$\sqrt{3+5\operatorname{tg}^2 x}=5\cos x-\sin x\cdot\operatorname{tg} x.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

67. (МГУ, ф-т психологии). Решить уравнение

$$2-3\operatorname{tg}x=\sqrt{\frac{5-6\cos^2 x}{\cos^2 x}}.$$

Ответ: $x=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+n\cdot\pi,\ n\in\mathbf{Z}$.

68. (МГУ, ф-т психологии). Найти все корни уравнения

$$\sqrt{5+4\sin x-4\cos^2 x}=2+\cos 2x.$$

Ответ:

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+n\pi;\quad x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

69. (МГУ, филологический ф-т). Найти сумму корней уравнения

$$\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-3\cos^3 x}{\cos^2 x},$$

принадлежащих интервалу $1\leqslant x\leqslant 50$.

Ответ: 128π.

70. (МГУ, филологический ф-т). Решить уравнение

$$\log_2(2\sin^2(2x)+1)-2\log_2\cos x=1+\log_2 5.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

71. (МГУ, филологический ф-т). Решить уравнение

$$\log_2\left(5+3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin^2\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+(2n+1)\pi,\ n\in\mathbf{Z}$.

72. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$\sin 2x(\operatorname{tg}^2 x+3)=4(\cos 2x-1).$$

Ответ:

$$x=\pi\cdot n;\ x=\frac{\pi}{4}(4n-1);\ x=-\operatorname{arc\,ctg}3+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

73. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right).$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}$.

74. (МГУ, ф-т почвоведения). Решить уравнение

$$2(\sin^2 2x+1)=\sin 8x+6\cos^2 2x.$$

Ответ: $x=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

75. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n$, $n\in\mathbf{Z}$.

76. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{4\sin^2\left(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-1}{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}}=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $x=\pi+4\pi\cdot k$, $k\in\mathbf{Z}$.

77. (МГУ, географический ф-т). Решить уравнение

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cdot\cos^2 2x}.$$

Ответ:

$$x=\frac{\pi}{12}+2\pi\cdot n;\ x=-\frac{7}{12}\pi+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

78. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\log_4(1+\operatorname{tg}^2 x)+\log_2\cos 2x-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\cos x}=-2,$$

удовлетворяющие условию $0\leqslant x<2\pi$.

Ответ:

$$x_1=\arccos\sqrt{\frac{4}{7}};\ x_2=2\pi-\arccos\sqrt{\frac{4}{7}}.$$

79. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2}\cos x+\frac{|\sin x-1|}{\sin x-1}\cdot\sin 2x=0.$$

Ответ:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi(2n+1);\ x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

80. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=|1-2\cos x+\cos 2x|.$$

Ответ:

$$x = 2\pi \cdot n;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n;\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

81. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$|\cos x - \sin x| = 1 + \sin 2x.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$

82. (МГУ, химический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin 3x + \cos x - \sin x} = \sqrt{\cos x - \sin 2x}.$$

Ответ: $x = 2\pi \cdot n;\ x = \frac{\pi}{3}(6n + 5),\ n \in \mathbf{Z}.$

83. (МГУ, химический ф-т). Найти все решения уравнения

$$4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}(1 - \cos x - \sin x) = 4 - \sin x - 3\cos x,$$

которые являются и решением уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 x + \left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\right)\cos x = 1 - \sin x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

84. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\cos 3x + \sin x \cdot \sin 2x = 2\cos^3 x + 2\operatorname{tg} x.$$

Ответ:

$$x = (-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2}) + \pi \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

85. (МГУ, физический ф-т). Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 3x = 4.$$

Ответ: $x = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{11} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbf{Z}.$

86. (МГУ, ВМК). Решить уравнение

$$\sin^2 5x\left(\sin 7x \cdot \cos x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3}{2}x\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2} + \sin x\cos 7x}{1 + \operatorname{ctg}^2 5x}.$$

Ответ:

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4};\ x=\frac{\pi(2n+1)}{2},\ k,\ n\in\mathbf{Z}.$$

87. (МГУ, ВМК). Решить уравнение

$$\sqrt{1-\operatorname{tg}x+\sin^2 x}-\sqrt{\sin^2 x-\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{9}{5}-\operatorname{tg}x}.$$

Ответ: $x=-\operatorname{arctg}2+\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}$.

88. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\cos 13x=\cos x,$$

$$\cos 2x+\sin 5x=1,$$

$$|x|<3.$$

Ответ: $0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}$.

89. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения уравнения

$$9^{\sin^2 x}-3\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x}=6,$$

принадлежащие отрезку $\left[-2;\ -\frac{3}{2}\right]$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

90. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения уравнения

$$2\log_5|\operatorname{ctg}x|-\log_{\frac{1}{5}}\frac{\sin x}{5\sin x-4\cos x}=0,$$

принадлежащие отрезку $[3{,}3;\ 4]$.

Ответ: $\frac{5}{4}\pi$.

91. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить уравнение

$$\frac{2}{\lg\left(\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)}=\log_{\sin 2x}10.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

92. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить уравнение

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)=1.$$

Ответ: $x=\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

93. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\cos 2x+5\sin x+2\geqslant 0.$$

Ответ: $2\pi k-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{7}{6}\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

94. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}x-3\geqslant 0.$$

Ответ: $k\pi-\frac{\pi}{2}<x\leqslant\operatorname{arctg}(-2)+k\pi;$

$$k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

95. (МГУ, филологический ф-т). Решить неравенство

$$\operatorname{ctg}(5+3x)(\operatorname{ctg}5+\operatorname{ctg}3x)\geqslant\sqrt{\operatorname{ctg}3x}-1.$$

Ответ: $x=\frac{k\cdot\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}.$

96. (МГУ, геологический ф-т). Найти все значения x, удовлетворяющие неравенствам

$$\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}3x>0,\ 0\leqslant x<\pi.$$

Ответ: $0<x<\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{8};$

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{8};\ \frac{5\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{8}.$$

97. (МГУ, химический ф-т). Найти все решения уравнения

$$2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0.$$

Ответ: $x=\frac{5}{48}\pi+\pi\cdot k;\ x=\frac{17}{48}\pi+\pi l;$

$$x=\frac{7}{24}\pi+\pi m,\ k,\ l,\ m\in\mathbf{Z}.$$

98. (МГУ, химический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{3}{2}x\right),$$

удовлетворяющие условию $\sin\frac{3}{2}x<0$.

Ответ: $x=\frac{3}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi l$; $x=\frac{13\pi}{12}+\frac{4}{3}\pi\cdot k$;

$$x=-\frac{7}{18}\pi+\frac{4}{3}\pi\cdot n,\ l,\ k,\ n\in\mathbf{Z}.$$

99. (МГУ, химический ф-т). Найти все значения x, для которых выражение

$$(\sin 4x+\sin 2x)\,(3\cos^2 x+2\sin 2x-6\cos x)$$

положительно.

Ответ:

$$-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k<x<\frac{2\pi}{3}k;\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi\cdot m,\ k,\ m\in\mathbf{Z}.$$

100. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$2\cos 8x\geqslant 3+4\sin 4x.$$

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.

101. (МГУ, биологический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{2}+\frac{\cos 4x}{\sqrt{2}}>2\cos 2x.$$

Ответ: $x\neq\pm\frac{\pi}{8}+\pi\cdot n$, $n\in\mathbf{Z}$.

102. (МГУ, ВМК). Найти все решения неравенства

$$\sqrt{\sin 2x}<\cos x-\sin x,$$

удовлетворяющие условию $|x|<\pi$.

Ответ: $0\leqslant x<\frac{\pi}{12}$; $-\frac{7}{12}\pi<x<-\frac{\pi}{2}$.

103. (МГУ, ВМК). Решить неравенство

$$\frac{1}{\cos^2 x}-1\geqslant\frac{|\operatorname{tg}x-\sqrt{3}|+\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}x}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi\cdot m<x<\frac{\pi}{2}+\pi\cdot m;$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot m<x<\pi\cdot m,\ m\in\mathbf{Z}.$$

104. (МГУ, ВМК). Решить неравенство

$$1+\cos 2x\geqslant\cos x(1+|1-2\cos x|).$$

Ответ: $2\pi\cdot n+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi\cdot n+\frac{3\pi}{2};$

$$2\pi\cdot n-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

105. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все x из интервала $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, удовлетворяющие неравенству

$$\cos 2x-\sin 2x+\cos x+\sin x\leqslant 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}\leqslant x<\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}<x\leqslant-\frac{\pi}{4}.$

106. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все x из отрезка $0\leqslant x\leqslant\pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x-\cos x+\sqrt{2}\sin x>\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{6}<x\leqslant\pi.$

107. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$5+2\cos 2x\leqslant 3|2\sin x-1|.$$

Ответ: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi\cdot k\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot k;$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

108. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi\cdot k\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{6}+2\pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z}.$

109. (МГУ, филологический ф-т). Решить систему урав-

нений

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, \\ y = \pm \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, \ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

110. (МГУ, ф-т психологии). Решить неравенство

$$\log_{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\sin x}{2}\right) < 2.$$

Ответ: $2\pi \cdot n < x < 2\pi \cdot n + \arcsin(\sqrt{2} - 1);$

$$2\pi \cdot n + \frac{\pi}{4} < x < 2\pi \cdot n + \frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbf{Z}.$$

111. (МГУ, экономический ф-т). Найти $\operatorname{tg} x$, если

$$\begin{cases} y \sin x + \cos x = 2, \\ -4 \sin x + 2y \cos x = -y. \end{cases}$$

Ответ: $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$.

112. (МГУ, экономический ф-т). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x-y) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(x-y) + 1 = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \ -\pi \leqslant y \leqslant 0.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}; -\pi\right); \left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right); \left(\frac{\pi}{6}; 0\right).$

113. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} \cdot (\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1) = 0, \\ \cos^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg} y - 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, \ l \in \mathbf{Z}, \\ y = \operatorname{arctg} 2 + \pi \cdot k, \ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

114. (МГУ, геологический ф-т). Решить систему

$$\begin{cases} x + \sin(x + y) = \frac{3}{2}, \\ 3x - \sin(x + y) = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n - 1, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

115. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения системы

$$\begin{cases} 5^{\sin x + \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям: $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4}, \\ y_1 = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3\pi}{4}, \\ y_2 = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{cases}$$

116. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения системы

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin y = 2\cos^2 30°, \\ 2\cos 2x - \sin y = \sin 540°. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k, \ k \in \mathbf{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

117. (МГУ, геологический ф-т). Найти все решения системы

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y - 1 = 2\sin\frac{x}{2}\sin y \cdot \cos\frac{x}{2}, \\ y - 2x = \pi. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3}(2k-1), \\ y = \frac{\pi}{3}(4k+1), \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

118. (МГУ, геологический ф-т). Найти все пары значений (x, y), являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{14}, \\ \sin x \cdot \frac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{196} - 2 \end{cases}$$

и удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}), \\ y_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}\right); \end{cases}$

$\begin{cases} x_2 = \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}), \\ y_2 = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}\right); \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = \pi - \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}), \\ y_3 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}\right); \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = \pi - \arcsin(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}), \\ y_4 = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}\right). \end{cases}$

119. (МГУ, физический ф-т). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi \cdot n}{2}; \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi \cdot n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

120. (МГУ, ВМК). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos(2x + 6\sin^2 y) = 1, \\ 3x - 3\sin^2 y = -10. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -\frac{5}{2}, \\ y = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} + \pi \cdot n, \ n \in \mathbf{Z}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{5}{2}, -\frac{\pi}{4} \\ y = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}} + \pi \cdot n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

121. (МГУ, ВМК). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y \cdot \cos x + \sin x = 0, \\ 2\cos^2 y + \sin y \cdot \sin x = \cos 2y \cdot \cos x. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot m, \ m \in \mathbf{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k, \ k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot n, \ n \in \mathbf{Z}, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

122. (МГУ, ВМК). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) + (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg}(5y) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2(5y) + (3 - \sqrt{2})\sin(-2x) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \cdot k}{2}, \ k \in \mathbf{Z}; \\ y = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi \cdot n}{5}, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

1. Исходя из определения производной, непосредственно найти производные следующих функций:

а) x^2+x; б) x^3; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y=x^4-7x+12$; г) $y=\frac{1}{x^2}+\sin x$;

б) $y=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}$; д) $y=x^3-e^x+\frac{\operatorname{tg}x}{2}$;

в) $y=\sqrt[4]{x^3}+4x^5$; е) $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x+3\log_3 x$.

3. Найти производные следующих функций:

а) $y=\cos\left(x^2+5x-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $y=\sin^2 x+\ln(x^2-3x+7)$;

б) $y=\sqrt[3]{x}\ln x$; д) $y=\frac{x\operatorname{tg}x}{1+x^2}$;

в) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$; е) $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

4. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sin(3^x)$; г) $y=\ln(\ln x)$;

б) $y=e^{(-x^2)}\operatorname{ctg}x$; д) $y=e^{-x}\cdot\operatorname{tg}^3 x$;

в) $y=\log_6\cos x$; е) $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

5. Доказать, что функция $f(x)=|x^2-1|$ не имеет производной в точке $x=1$.

6. (МЭИ). Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^{-2}\times$$
$$\times\left(\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)}+1\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

Ответ: $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$.

7. (МИЭМ). Функция f задана формулой

$$f(x)=\frac{|3x-4|+2x^2-4x-1}{|2x+1|-2};$$

а) найти область определения функции f;

б) найти производную функцию f в интервале $]-\infty; -2[$; чему равно $f'(-4)$?

в) имеет ли функция f пределы при $x \to \frac{1}{2}$ и при $x \to -\frac{3}{2}$?

г) при каком значении a функция g, заданная правилом

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq \frac{1}{2} \\ a, \text{ если } x = \frac{1}{2}, \text{ имеет производную в точке } x = \frac{1}{2}? \end{cases}$$

Ответ: а) $]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$;

б) $f'(x) = -1 + \frac{9}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}$, $f'(-4) = \frac{13}{25}$;

в) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -2\frac{1}{2}$. При $x \to -\frac{3}{2}$ предела нет;

г) $-2\frac{1}{2}$.

8. (МИИГАиК). Решить неравенство $f'(x) > g'(x)$, если

$$f(x) = x - \frac{4}{x}, \; g(x) = 2x^3 - x.$$

Ответ: $]-1; 0[\cup]0; 1[$.

9. (МИИГАиК). Решить неравенство

$$f'(x) \leqslant g'(x),$$

если

$$f(x) = \frac{2}{x}; \; g(x) = x - x^3.$$

Ответ: $[-1; 0[\cup]0; 1]$.

10. Пусть $f(x) = x + \ln(x-5)$, $g(x) = \ln(x-1)$. При каких значениях x выполняется неравенство

$$f'(x) > g'(x)?$$

Ответ: $x \in]5; +\infty[$.

11. (МИСИ). Даны функции $f(x) = 4 - 15x^2 - 2x^3$ и $\varphi(x) = 2x^3 + 18x + 1$. При каких значениях x будет выполняться неравенство $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} > 0$?

Ответ: $]-5;\ 0[$.

12. (Уральский гос. университет). Найти все значения x, из отрезка $[-\pi;\ 0]$, при которых функция $f(x)=e^{\sin(\pi/4-2x)}$ удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} \ln f(x) > \dfrac{1}{2}, \\ f'(x) \leqslant -f(x). \end{cases}$$

Ответ:

$$\left[-\pi;\ -\frac{23\pi}{24}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{24};\ 0\right].$$

13. (КГУ). При каких значениях x производная функции

$$y=\sin 2x+10\cos x-6x$$

равна нулю?

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi\cdot k,\ k\in \mathbf{Z}$.

14. (МГУ, географический ф-т). Найти все значения x, при которых производная функции

$$y=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x$$

равна нулю.

Ответ: $x=\dfrac{k\pi}{2};\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+n\pi,\ k,\ n\in \mathbf{Z}$.

15. (МГУ, географический ф-т). Найти все значения x при которых производная функции

$$y=\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$$

равна нулю.

Ответ: $x=\dfrac{2k+1}{6}\pi;\ x=n\pi;\ k,\ n\in \mathbf{Z}$.

16. (МОПИ). Написать уравнение касательной к параболе $y=x^2-2x$ в точке с абсциссой $x_0=0{,}5$.

Ответ: $y=-x-\dfrac{1}{4}$.

17. (МИСиС). Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{1}{x^4}+2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Ответ: $y=-4x+7$.

18. (МИНХ). Составить уравнение касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{2}\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$$

в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $y = \sqrt{3}x + \left(\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$.

19. Найти координаты точки пересечения касательных к графику функции $y = \cos x$ в точках $x = -\frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{\sqrt{3}\pi + 3}{6}\right)$.

20. Написать уравнение касательных к кривой в точках ее пересечения с осью абсцисс.

а) $y = x^2 + 2x - 3$;

б) $y = x(x-1)$.

Ответ: а) $y = 4(x-1)$; $y = -4(x+3)$; б) $y = -x$; $y = x - 1$.

21. (МИСИ). Написать уравнение касательной к линии $y = x^2 - 4x + 5$ в точке пересечения этой линии с осью ординат.

Ответ: $y = -4x + 5$.

22. (МЭИС). Написать уравнения касательных к графику функции $f(x) = 4 - x^2$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.

Ответ: $y = -4x + 8$ и $y = 4x + 8$.

23. Найти координаты точек пересечения с осью Ox касательных к графику функции $y = \frac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол 135° с осью Ox.

Ответ: (0; 0), (8; 0).

24. (Казанский гос. университет). На кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x$.

Ответ: $(1 - \sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $(1 + \sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

25. (МЭИС). В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 7x + 3$ параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$?

Ответ: $M_0(1; -3)$.

26. В каких точках касательные к графику функции

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x - \sin x$$

параллельны прямой $y + x - 1 = 0$?

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

27. (МИСИ). В какой точке касательная к графику функции

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-9x+8$$

будет параллельна биссектрисе I и III координатных углов?

Ответ: $x_1=-2,\ x_2=5$.

28. (МИСИ). В какой точке касательная к линии $y=\ln(4x-1)$ параллельна прямой $y=x$?

Ответ: В точке $\left(\frac{5}{4};\ \ln 4\right)$.

29. Найти все значения x, при которых касательная к графику функции

$$y=\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 3x$$

в точке с абсциссой x параллельна прямой $y=x$.

Ответ: $x=\frac{2\pi n}{3};\ x=-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$.

30. (ЛГПИ). Написать уравнение горизонтальной касательной к графику функции

$$y=e^x+e^{-x}.$$

Ответ: $y=2$.

31. (МИСИ). Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2-4x-17$, проведенная в точке с абсциссой $x_0=2{,}5$?

Ответ: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

32. Найти на графике функции $f(x)=3x^3-4x^2+7$ точку, касательная в которой образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $x_1=1;\ x_2=-1/9$.

33. (МИСИ). Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2+4x-17$, проведенная в точке $M(2{,}5;\ -0{,}75)$? Записать уравнение этой касательной.

Ответ: $\operatorname{arctg} 9;\ y=9x-23{,}25$.

34. (МЭИС). Под каким углом касательная к графику функции $\operatorname{tg} x$, проведенная в начале координат, пересекает ось абсцисс?

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

35. (МИНХ). В какой точке касательная к графику функции $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ образует угол 135° с осью Ox?

Ответ: $M_0(0;\ -1)$ и $M_1(4;\ 3)$.

36. (МЭИС). В какой точке кривой $y^2=2x^3$ касательная перпендикулярна прямой $4x-3y+2=0$?

Ответ: $M_0\left(\frac{1}{8};\ -\frac{1}{16}\right)$.

37. (МИСиС). Найти уравнение общей касательной к кривым $y=x^2+4x+8$ и $y=x^2+8x+4$.

Ответ: $y=8x+4$.

38. Под каким углом пересекаются касательные к кривым $y=\sqrt{2x}$ и $y=x^2/2$, проведенные в точке пересечения этих кривых?

Ответ: $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

39. Найти угол между касательными к графику функции $y=3x^3-7x^2+3x+5$, проведенными в точках с абсциссами 0 и 1.

Ответ: $\pi-\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$.

40. Вычислить величину угла между касательными, проведенными из точки $M(0;\ -1)$ к графику функции $y=x^2$.

Ответ: $\pi-2\operatorname{arctg}2$.

41. (Ростовский гос. университет). Известно, что прямая $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}$ является касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x$. Найти координаты точки касания.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{15}{32}\right)$.

42. (ЛГУ). К графику функции $y=(x+1)\sqrt{x}$ проведена касательная в той точке, где угловой коэффициент равен 2, причем касательная не проходит через начало координат. Найти точки пересечения этой касательной с координатными осями.

Ответ: $\left(0;\ \frac{4}{27}\right)$, $\left(-\frac{2}{27};\ 0\right)$.

43. Доказать, что при любом a существует касательная к графику функции $y=x^3-a^2x$, перпендикулярная прямой $y=-x$.

44. Из некоторой точки графика функции $y=\sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этой касательной и прямыми $y=0$, $x=\frac{1}{4}$.

Ответ: $1/8$.

45. (МЭИС). Найти уравнение параболы $y=x^2+bx+c$, касающейся прямой $y=x$ в точке $M(1; 1)$.

Ответ: $f(x)=x^2-x+1$.

46. (МИСИ). Определить b и c в уравнении параболы $y=x^2+bx+c$, если прямая $y=2x+2b$ касается параболы в точке $M(2; 0)$.

Ответ: $b=-2$, $c=0$.

47. (ЛГУ). При каком значении k касательная к графику функции $y=kx^2$ образует с осью Ox угол, равный $\frac{\pi}{3}$, и отсекает от 4-й четверти треугольник с площадью, равной $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?

Ответ: $\frac{3}{16}$.

48. (МГУ, ф-т психологии). На графике функции $y=x^3-3x^2-7x+6$ найти все такие точки, что касательная к этому графику в искомых точках отсекает от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy. Определить длины отсекаемых отрезков.

Ответ: $M(3; -15)$, длины $\frac{21}{2}$ и 21.

49. (МГУ, ВМК). Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, касающейся графика функции $y=-\frac{x^2}{2}+2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

Ответ: $y=-x+\frac{5}{2}$.

50. При каких a касательные, проведенные к графику функции $y=x^3-a^2x$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс, пересекаются под углом 45°.

51. (МГУ, ф-т психологии). Найти на графике функции

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{18}{5}x+\frac{14}{5}$$

все точки, такие, что касательная к этому графику в искомых точках перпендикулярна прямой $5x-3y+2=0$.

Ответ: $M_1\left(-1; \frac{76}{15}\right)$; $M_2(3; -8)$.

52. (МГУ, ВМК). Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (1; 3), касающейся графика функции $y=8\sqrt{x-7}$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=x^2+4x-1$.

Ответ: $y=2x+1$.

53. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1.$$

Ответ: Функция убывает на промежутке $]-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty[$.

54. (МАТИ). Является ли функция $\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+2x-2\sqrt{2}$ монотонной на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $[1; 6]$?

Ответ: На $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ — нет, на $[1; 6]$ — да.

55. (МИИГАиК). Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y=2x^3-3x^2.$$

Ответ: Функция возрастает на промежутках $]-\infty; 0]$ и $[1; +\infty[$ и убывает на промежутке $[0; 1]$.

56. (МАТИ). Где возрастает функция

$$f(x)=-x^3-x^2-7x-\sqrt{3}?$$

Ответ: Нигде (функция f убывает на R).

57. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y=\frac{e^{x^2}}{x}.$$

Ответ: Промежутки возрастания $y_1=\left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $y_2=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$; промежутки убывания $y_3=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right[$ и $y_4=\left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

58. (МИХМ). Исследовать функцию $y=2x^3+3x^2-12x+5$ на максимум и минимум.

Ответ: В точке -2 — максимум, в точке 1 — минимум.

59. Исследовать на экстремум функцию

$$y=\frac{(x-2)^2(x+4)}{4}.$$

Ответ: $x=-2$ — точка максимума; $x=2$ — точка минимума.

60. (ЛЭТИ). Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x)=xe^{x-x^2}.$$

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$ — точка минимума, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}}$, $x=1$ — точка максимума, $f(1)=1$.

61. (ЛГПИ). Найти экстремумы функции

$$y=x+\sin 2x.$$

Ответ: Точки минимумов $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, значения минимумов равны соответственно $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}+k\pi$; точки максимумов $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, значения максимумов соответственно равны $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}+k\pi$, где $k\in\mathbf{Z}$.

62. Найти модуль разности экстремумов функции

$$y=x^3+3x^2-3x+1.$$

Ответ: $8\sqrt{2}-1$.

63. (МГУ, ф-т почвоведения). Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$f(x)=xe^{-5x}.$$

Ответ: $x<\frac{1}{5}$ — возрастает; $x>\frac{1}{5}$ — убывает; $x=\frac{1}{5}$ — точка максимума.

64. (МГУ, ф-т почвоведения). Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$f(x)=(x-1)e^{3x}.$$

Ответ: $x<\frac{2}{3}$ — убывает; $x>\frac{2}{3}$ — возрастает; $x=\frac{2}{3}$ — точка минимума.

65. (МГУ, географический ф-т). Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции

$$y=\frac{x^2}{\ln x}.$$

Ответ: $]0;\ 1[\cup]1;\ \sqrt{e}[$ — убывает; $]\sqrt{e};\ +\infty[$ — возрастает; $x=\sqrt{e}$ — точка минимума.

66. (МГУ, географический ф-т). Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и миниму-

ма функции

$$y = \frac{1}{x \ln x}.$$

Ответ: $]0; \frac{1}{e}[$ — возрастает; $]\frac{1}{e}; 1[\cup]1; +\infty[$ — убывает; $x = \frac{1}{e}$ — точка максимума.

67. (МГУ, физический ф-т). Исследовать на экстремум функцию

$$y = \sqrt{2x^2 - x + 2}.$$

Ответ: $y_{\min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{15}{8}}$.

68. (МГУ, физический ф-т). Исследовать на экстремум функцию

$$y = (2x - 1)\, e^{3x}.$$

Ответ: $y_{\min} = y\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{e}$.

69. Найти критические точки функции $y = \sin \frac{\pi}{x^2 + 1}$, выяснив, какие из них есть точки максимума, а какие — точки минимума.

Ответ: $x = \pm 1$ — точки максимума; $x = 0$ — точка минимума.

70. (ЛГПИ). Определить интервалы монотонности функции $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$ и найти ее экстремумы.

Ответ: На промежутках $]-\infty; -3]$ и $[-1; +\infty[$ функция f убывает, на промежутках $[-3; -2[$ и $]-2; -1]$ она возрастает; точка -3 является точкой ее минимума, точка -1 — точкой максимума.

71. (МАДИ). Найти экстремумы функции $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ и указать интервалы возрастания и убывания.

Ответ: Точка 0 — точка минимума, промежутки убывания — $]-\infty; 0]$ и $]1; +\infty[$, промежуток возрастания — $[0; 1[$.

72. (МГУ, ВМК). Найти точки минимума функции

$$\sqrt{3} \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} - \frac{x - 3}{2}.$$

Ответ: $x = -\frac{4}{3}\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

73. (МГУ, ВМК). Найти точки максимума функции

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{5 - x}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$.

74. Найти критические точки следующих функций, выяснив, какие из них есть точки максимума, а какие — точки минимума:

а) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$; б) $y=|x^3-x|$;

в) $y=\sin x-\cos^2 x-1$; г) $y=x+\frac{1}{x^2}$.

Ответ: а) $\{1\}$ — мин., $\{-1\}$ — макс., б) $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ — макс., $\{0;\ -1;\ 1\}$ — мин.; в) $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$ — макс., $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi\,|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$ — мин.;

г) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\}$ — мин.

75. (МИФИ). Найдите критические точки функции

$$y=2\sin^2\frac{x}{6}+\sin\frac{x}{3}-\frac{x}{3},$$

координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2-10<-19{,}5x.$$

Ответ: $\left\{-6\pi;\ -\frac{9\pi}{2};\ 0\right\}$.

76. Исследовать функцию $y=x-\frac{1}{x}$ с помощью производной и построить ее график.

77. Исследовать функцию $y=x+\frac{1}{x^2}$ с помощью производной и построить ее график.

78. (МИЭМ). Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции, заданной равенством

$$f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1.$$

Построить график этой функции.

Ответ: На $]2;\ 3[$ f возрастает, на $]3;\ +\infty[$ f убывает, $x=3$ — точка максимума.

79. Исследовать функцию $f(x)=\ln|\sin x|$ с помощью производной и построить ее график.

80. Исследовать функцию $y=x\sqrt{2-x^2}$ и построить ее график.

81. (МАИ). Какие точки называются критическими точками для данной функции? Какая существует связь между точками экстремума и критическими точками функций? Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $y=2x^3-9x^2+12x$. Постройте график.

Ответ: Возрастает на $]-\infty; 1]$ и на $[2; +\infty[$, убывает на $[1; 2]$, при $x=1$ имеет максимум, при $x=2$ — минимум.

82. Исследовать следующие функции с помощью производной и построить их графики:

а) $y=\frac{x}{1+x^2}$; б) $y=2^{1/x}$; в) $y=\frac{1+x}{1-x}$;

г) $y=\log_2 \sin x$; д) $y=\lg x^2$; е) $y=\sin(\operatorname{tg} x)$;

ж) $y=\sin\frac{\pi}{x^2+1}$.

83. (ЛГУ). Найти экстремумы, а также наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}$$

на сегменте $[0; 3]$.

Ответ: Точка $x_0=1$ является точкой минимума функции $f(x)$, точек максимума на отрезке $[0; 3]$ у нее нет,

$$\max_{[0;3]} f(x)=f(3)=4\sqrt{6},\quad \min_{[0;3]} f(x)=f(1)=0.$$

84. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=2x^3-9x^2+12x+1$$

на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: Наибольшее $y=6$; наименьшее $y=1$.

85. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=|(x+1)(2x-5)^2|$ на отрезке $[-5; 4]$.

Ответ: Наибольшее $y=1350$; наименьшее $y=0$.

86. Найти наименьшее и наибольшее значения функций на указанных промежутках

а) $f(x)=x^2-4|x|+4$, $x\in[-3; 3]$;

б) $f(x)=x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}x^2\right)$, $x\in[-1{,}2; 0{,}2]$;

в) $f(x)=x^3-x$, $x\in[0; 4]$.

Ответ: а) Наибольшее $y=4$, наименьшее $y=0$; б) наибольшее $y=\frac{976\cdot 8}{3\cdot 10^6}$, наименьшее $y=-\frac{2}{15}$; в) наибольшее $y=60$, наименьшее $y=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

87. (МГУ, геологический ф-т). Найти наименьшее значение функции

$$x\ln x - x\ln 5$$

на отрезке $[1; 5]$.

Ответ: $-\frac{5}{e}$.

88. (МЭИС). Найти наименьшее и наибольшее значения функций $y(x) = x - 2\ln x$ на отрезке $[1; e]$.

Ответ: $\max\limits_{[1;e]} y(x) = y(1) = 1$, $\min\limits_{[1;e]} y(x) = y(2) = 2 - 2\ln 2$.

89. (МИСиС). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2(2x-3) - 12(3x-2)$ на $[-3; 6]$.

Ответ: $\max\limits_{[-3;6]} f(x) = f(6) = 132$, $\min\limits_{[-3;6]} f(x) = f(3) = -57$.

90. (МИИГАиК). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x$ на отрезке $[0; 2]$.

Ответ: $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 2\frac{2}{3}$, $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = -2\frac{2}{3}$.

91. (МИТХТ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1; 3]$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;3]} y(x) = y(3) = 0$, $\min\limits_{[-1;3]} y(x) = y(2) = -25$.

92. (МИНХ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{2}$,

$$\min_{\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y(0) = 1.$$

93. (МИСИ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ на отрезке $[-4; 0]$.

Ответ: $\min\limits_{[-4;0]} f(x) = f(-2) = -\frac{1}{4}$, $\max\limits_{[-4;0]} f(x) = f(0) = 0$.

94. (МИЭМ). Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$f_1(x) = 2x - \sqrt{9-x^2}$, $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 2)$.

Найти область определения функции $f(x)$, а также наибольшее и наименьшее значения функции $f_2(x)$ на отрезке $[3; 6]$.

Ответ: $[-3; -2[\cup]1; 3]$.

$$\max_{[3;6]} f_2(x) = f_2(3) = \log_{\frac{1}{3}} 10,$$

$$\min_{[3;6]} f_2(x) = f_2(6) = \log_{\frac{1}{3}} 40.$$

95. (МИЭМ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = e^{2x-1} + 2e^{1-2x} + 7x - 3$ на отрезке $[0{,}14; 1]$.

Ответ: $\max\limits_{[0,14;1]} f(x) = f(1) = e + \frac{2}{e} + 4$,

$$\min_{[0,14;1]} f(x) = f\left(\frac{1-\ln 2}{2}\right) = \frac{10 - 7\ln 2}{2}.$$

96. (МИНХ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x$ на отрезке $[-1; 1]$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 5$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 4$.

97. (МИНХ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$ на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = \frac{17}{4\ln 2}$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = \frac{2}{\ln 2}$.

98. (МИНХ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x$ на отрезке $[e^{3/4}; e^3]$.

Ответ: $\max\limits_{[e^{3/4};e^3]} f(x) = f(e^3) = 9$, $\min\limits_{[e^{3/4};e^3]} f(x) = f(e^2) = 4$.

99. (ДГУ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin 2x - x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}$.

100. (МГУ, геологический ф-т). Найти наименьшее значение функции $\frac{1}{2} x\ln x - x\ln 2$ на отрезке $[1; 4]$.

Ответ: $-\frac{2}{e}$.

101. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = |\log_2^2 2x - \log_2 8x|$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\sqrt{2}\right]$.

Ответ: Наибольшее $y = \frac{7}{4}$; наименьшее $y = -\frac{9}{4}$.

102. (МИЭМ). Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=3x+2\operatorname{ctg}x\left(x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Выяснить, имеет ли решение неравенство $f(x)<4{,}5$.

Ответ: $\min\limits_{\left]0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=$

$=3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{2}$. Имеет $\left(\text{например, } x=\frac{\pi}{3}\right)$.

103. Найти наименьшее значение функции $f=\left(x\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2\right.$ на промежутке $]0;\pi[$.

Ответ: $y=3$.

104. (МГУ, филологический ф-т). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\sin^2 x+\cos x-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\max\limits_R f(x)=\frac{3}{4}$; $\min\limits_R f(x)=-\frac{3}{2}$.

105. (КГУ). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{24}\right).$$

Ответ: $\max\limits_R y=\frac{3}{4}$, $\min\limits_R y=-\frac{1}{4}$.

106. (МЭИ). Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=3x-9x^2-7x^3-6$ на отрезке $\left[-\frac{3}{2};1\right]$ и построить график функции на указанном отрезке.

Ответ: $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};1\right]} f(x)=f(1)=-19$, $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};1\right]} f(x)=$

$=f\left(\frac{1}{7}\right)=-5\frac{38}{49}$.

107. (МГУ, механико-математический ф-т). Доказать, что для функции $f(x)=(\cos x)^2(\sin x)$

$$\min_{[-\pi;\pi]} f(x)>-\frac{7}{18}.$$

108. (МГУ, механико-математический ф-т). Доказать,

что для функции

$$f(x) = (\cos x)\,(\sin x)^2$$

$$\max_{[-\pi;\pi]} f(x) < 0{,}39.$$

109. (МИСиС). На промежутке $]0;\ \pi[$ задана функция $y = 1 - \cos x$. Найти наибольшее значение абсциссы точки пересечения касательной к графику данной функции с осью Ox.

Ответ: $\frac{\pi - 2}{2}$.

110. Определить кратчайшее расстояние от точки $M(1;0)$ до графика функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$.

Ответ: 3.

111. (МГУ, экономический ф-т). Найти минимум квадрата расстояния от точки M с координатами $(0;\ 1)$ до точек графика функции

$$y = 1 + \frac{1}{4\sqrt{3}\,x^{3/2}}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}$.

112. (МГУ, экономический ф-т). Найти минимум квадрата расстояния от точки M с координатами $(-1;\ 0)$ до точек $(x;\ y)$, таких, что

$$y = \frac{27}{\sqrt{2}(x+1)^2},\quad x \in\ ]-1, +\infty[.$$

Ответ: $13\frac{1}{2}$.

113. (МИСиС). Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями v_1 и v_2. В какой момент времени расстояние между движущимися точками будет наименьшее, если в начальный момент они занимали положения $(-3;\ 0)$ и $(0;\ 5)$?

Ответ: $t = 0$ при $v_1 \leqslant \frac{5}{3} v_2$; $t = \frac{3v_1 - 5v_2}{v_1^2 + v_2^2}$ при $v_1 > \frac{5v_2}{3}$.

114. (МЭИ). Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x) = 3x^3 - x - 76$ на отрезке $[0;\ 3]$; первый член прогрессии равен квадрату ее знаменателя. Найти знаменатель прогрессии.

Ответ: $\sqrt{3} - 1$.

115. (МЭИС). Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, то в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

Ответ: Части должны быть одинаковых масс.

116. (МЭИС). Даны точки $A(0; 3)$ и $B(4; 5)$. Найти на оси Ox точку M такую, чтобы $S=|AM|+|MB|$ было наименьшим.

Ответ: $M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

117. (МЭИ). При каком уменьшаемом разность будет наибольшей, если вычитаемое равно удвоенному квадрату уменьшаемого?

Ответ: $\frac{1}{4}$.

118. Число 36 разложить на два таких неотрицательных множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Ответ: $36=6\cdot 6$.

119. (ЛГУ). Найти три положительных числа; таких, чтобы их произведение было наибольшим, при условии, что сумма первого и второго чисел равна a, а сумма первого и третьего чисел равна $2a$.

Ответ: $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a,\ \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a$.

120. (МАИ). Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С корабля нужно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь расположен на берегу). Если матрос может делать пешком по 5 км в час, а на веслах по 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

Ответ: матрос должен пристать к берегу в 3 км от лагеря.

121. (МИФИ). Автомобиль едет из пункта K в пункт M. От пункта K до пункта L, расположенного между K и M, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте L он уменьшает свою скорость на v км/ч $(0<v<48)$ и с этой скоростью едет $^1/_3$ часть пути от L до M. Оставшуюся часть пути от L до M он едет со скоростью, которая на $2v$ км/ч превышает первоначальную скорость 48 км/ч. При каком значении v автомобиль быстрее всего проделает путь от L до M?

Ответ: $v=12$ км/ч.

122. Из всех прямоугольников, у которых две вершины лежат на интервале $]-2; 2[$ оси абсцисс, а две другие — на графике функции $y=4-x^2$, найти прямоугольник наибольшей площади.

Ответ: $S=\frac{32}{3\sqrt{3}}$.

123. (МИСиС). В фигуру, ограниченную линиями $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=6$, вписан параллелограмм наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой $x=6$, а две другие — на параболах $y=x^2$, $y=2x^2$. Найти эту площадь.

Ответ: $S=32$.

124. (МИСиС). В фигуру, ограниченную прямой $y=3x$ и параболой $y=x^2$, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие — на параболе. Найти эту площадь.

Ответ: $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

125. (МИХМ). Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8 см. Найти минимум суммы квадратов длин всех сторон параллелограмма.

Ответ: 32.

126. (МАИ). В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь? Найти эту площадь.

Ответ: $\frac{h}{2}$, $\frac{ah}{4}$.

127. (МИСиС). Сумма двух сторон треугольника равна a, а угол между ними равен 30°. Каковы должны быть длины сторон, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

Ответ: Длины сторон равны $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

128. (МИЭТ). В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны a. Найти большее основание, чтобы площадь трапеции была максимальной.

Ответ: $2a$.

129. (МИЭТ). На плоскости задана точка $M\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$. Проходящая через точку прямая образует вместе с положительными полуосями координат некоторый треугольник. Какое минимальное значение может принимать площадь этого треугольника?

Ответ: 1.

130. (МГУ, экономический ф-т). В круг радиуса R вписана трапеция так, что центр круга лежит внутри трапеции. Одно из оснований трапеции равно $R\sqrt{3}$. Найти боковую сторону трапеции так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

Ответ: $2R\sin\frac{2\pi}{9}$.

131. (МГУ, экономический ф-т). Хорда AB равна радиусу окружности. Хорда CD, параллельная AB, проведена так, что площадь четырехугольника $ABCD$ максимальна. Найти угловую величину меньшей из дуг, стягиваемых хордой CD.

Ответ: $\frac{5\pi}{9}$.

132. (МАИ). Площадь равнобедренной трапеции с углом при основании 60° равна 2 кв. дм. Найти длину высоты трапеции наименьшего периметра. Вычислить этот периметр.

Ответ: $h=\sqrt[4]{3}$ дм, $p=\frac{8}{\sqrt[4]{3}}$ дм.

133. (МАИ). Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=x^2+1$ и прямыми $y=0$, $x=1$, $x=2$. В какой точке данной кривой $y=x^2+1$, $x\in[1;\ 2]$ следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? Сделайте чертеж.

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\ \frac{13}{4}\right)$.

134. (МГУ, химический ф-т). Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр, равный 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислить величину этого объема.

Ответ: 4 см^3.

135. (МЭИС). Найти конус наибольшего объема, образующая которого имеет данную длину l.

Ответ: $H=l/\sqrt{3}$.

136. (ЛГУ). Каков должен быть радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности S, чтобы объем конуса был наибольшим?

Ответ: $\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$.

137. (МЭСИ). Из круга радиуса $3\sqrt[6]{\frac{675}{4\pi^2}}$ вырезан сектор, который свернут в коническую поверхность. Подобрать центральный угол сектора так, чтобы полученный конус имел наибольший объем. В ответе записать величину этого объема.

Ответ: 45.

138. (МИСиС). Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Ответ: $R=\sqrt[3]{V/2\pi}$, $H=2R$.

139. (МГУ, химический ф-т). Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3, а основания являются квадратами. Найти среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислить величину этого периметра.

Ответ: 6 см.

140. (МЭИ). Площадь сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу?

Ответ: 3.

141. (Казанский гос. университет). В правильную четырехугольную пирамиду с высотой H и стороной основания a вписан прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат со стороной b, так что его нижнее основание лежит на основании пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах пирамиды. При каком b объем вписанного параллелепипеда будет наибольшим? Найти объем при этом значении b.

Ответ: $b=\frac{2}{3}a$, $V=\frac{4}{27}a^2H$.

142. (МВТУ). Все вершины правильной треугольной призмы принадлежат сфере радиуса R. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим?

Ответ: $H=2R\sqrt{3}$.

143. (МВТУ). Одно из оснований цилиндра является сечением шара, а другое основание принадлежит большому кругу этого шара. Радиус шара равен R. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим?

Ответ: $H=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

144. (ЛГУ). Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь полной поверхности.

Ответ: $\frac{23-\sqrt{17}}{16}R$.

145. (КГУ). Вокруг шара объемом V описан конус таким образом, что его объем — наименьший из всех возможных. Найти объем конуса.

Ответ: $2V$.

146. (МЭСИ). Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса $R=\sqrt{3}$ так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

Ответ: 3.

147. (Ярославский гос. университет). Найти высоту треугольной пирамиды наибольшего объема, вписанной в шар радиуса R.

Ответ: $\frac{4}{3}R$.

148. (Ярославский гос. университет). Прямоугольный параллелепипед вписан в шар радиуса R. Найти поверхность параллелепипеда, если он имеет наибольший возможный объем.

Ответ: $8R^2$.

149. (МАДИ). Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

150. (КГУ). В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом φ, вписан цилиндр (одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность второго его основания имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью пирамиды). Радиус основания цилиндра и его высота равны r. Вычислить объем пирамиды, при каком значении угла φ объем пирамиды наименьший?

Ответ: Объем равен $\frac{4}{3}r^3\frac{(\operatorname{tg}\varphi+1)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}$. Наименьшим он будет при $\varphi=\operatorname{arctg}2$.

151. (КГУ). Вокруг шара радиуса r описана правильная треугольная пирамида с высотой H. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды. При каком H эта площадь наименьшая? Найти наименьшее значение площади.

Ответ. Площадь боковой поверхности равна $\frac{3\sqrt{3}\,rH(H-r)}{H-2r}$. Наименьшей она будет при $H=(2+\sqrt{2})r$; при таком H она равна $3\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})r^2$.

152. (МГУ, экономический ф-т). Найти все значения параметра a, при которых функция

$$y=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой.

Ответ: $a>6$.

153. (МГУ, экономический ф-т). Найти все значения параметра a, при которых функция

$$y=a\sin 4x-10x+\sin 7x+4ax$$

убывает и не имеет критических точек на всей прямой.

Ответ: $a<\frac{3}{8}$.

154. При каких a уравнение $x^3-ax-1=0$ имеет единственное решение?

Ответ: При $a<\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

155. (МИФИ). Найти критические точки функции

$$f(x)=0{,}5\,e^{2x}+(1-a)e^x-ax+\sin 2.$$

Ответ: При $a\in]0;+\infty[$ критическая точка $x=\ln a$, если $a\notin]0;+\infty[$, то критических точек нет.

156. (ХГУ). Найти наименьшее значение функции

$y = \frac{1}{x} + \frac{q^2}{6-x}$ на отрезке $[2; 3]$ в зависимости от параметра q.

Ответ: $\frac{1+q^2}{3}$ для $|q| \in [0; 1[$, $\frac{(1+q)^2}{6}$ для $|q| \in [1; 2[$ и $\frac{2+q^2}{4}$ для $|q| \in [2, +\infty[$.

157. (ЛГУ). Для каких значений параметра p наименьшее на промежутке $[0; 1]$ значение кубического трехчлена $x^3 - 2px^2 + 1$ достигается на правом конце промежутка?

Ответ: $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

158. (ЛГУ). Сколько корней имеет уравнение

$$f(x) - \alpha f'(x) = 0,$$

если $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, α, x_1, x_2, x_3, x_4 — действительные числа $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$?

Ответ: 4 (при любом $\alpha \in R$).

159. (ЛГУ). В зависимости от p указать те a, для которых уравнение $x^3 + 2px^2 + p = a$ имеет три различных корня.

Ответ: Если $p > 0$, то $a \in \left]p; \frac{32}{27}p^3 + p\right[$, если $p = 0$, таких a нет, если $p < 0$, то $a \in \left]\frac{32}{27}p^3 + p; p\right[$.

160. Найти все значения параметра p, при которых функция

$$f(x) = 2x^5 + 5px^4 + 10x^3$$

является возрастающей на любом отрезке числовой прямой.

Ответ: При $p \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

161. (МГУ, экономический ф-т). Найти множество всех действительных чисел a, при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек

Ответ: $]-\infty; -2-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$.

162. (МГУ, экономический ф-т). Найти множество всех действительных чисел b, при каждом из которых функция

$$f(x) = 16(b+1)\sin x - \sin 2x - (16b^2 + 32b - 10)x$$

является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Ответ: $\left]-\infty; -\frac{1}{2}(\sqrt{7}+3)\right[\cup\left]\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1); +\infty\right[$.

163. (МГУ, ВМК). Найти все значения параметра α, удовлетворяющего неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0$, при которых максимум функции

$$f(x) = -9x^4 + 12x^3(\cos\alpha + \sin\alpha) - 9x^2\sin 2\alpha$$

на отрезке $-\cos\alpha \leqslant x \leqslant -\sin\alpha$ принимает наибольшее значение.

Ответ:

$$\alpha_1 = -\operatorname{arc\,tg}\frac{7+2\sqrt{31}}{15};\ \alpha_2 = \operatorname{arc\,ctg}\frac{7+2\sqrt{31}}{15}.$$

164. (МГУ, ВМК). Найти все значения параметра α, удовлетворяющего неравенствам $-\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant 0$, при которых минимум функции

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2\cdot\cos^2\alpha + (1-\sin\alpha)^3$$

на отрезке $-(1-\sin\alpha) \leqslant x \leqslant 1-\sin\alpha$ принимает наибольшее значение.

Ответ: $\alpha = -\frac{\pi}{6}$.

§ 5. ИНТЕГРАЛ

1. Найти первообразные следующих функций:

а) $y = 2\sqrt{x} - 3x^2$; г) $y = \frac{7}{4x-3}$;

б) $y = \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}$; д) $y = \frac{x-2}{2x+1}$;

в) $y = \sqrt[3]{1-3x}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{3-7x}}$.

2. Найти первообразные следующих функций:

а) $y = 3^x + 5^x$; г) $y = \operatorname{tg}^2 x$;

б) $y = \sin(2x+1) + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; д) 2^{2x+3};

в) $y = e^{x-3}$; е) $y = \frac{1}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

3. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^2 (x^2+1)\,dx$; г) $\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x-3}$; д) $\int\limits_{-1}^{8} (2-\sqrt[3]{x})\,dx$;

в) $\int\limits_{-3}^{0} |x+1|\,dx$; е) $\int\limits_{0}^{4} \frac{x}{2x+1}\,dx$.

4. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{2\pi} |\sin x|\,dx$; г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$;

б) $\int\limits_{0}^{3} e^{-\frac{x}{3}}\,dx$; д) $\int\limits_{0}^{1} 2^x \cdot e^x\,dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos 2x\,dx$; е) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{\cos^2 x}\,dx$.

5. (МАМИ). Найти функцию $F(x)$, если $F'(x)=3x^2+1$ и $F(1)=3$ и построить ее график.

Ответ: $F(x)=x^3+x+1$.

6. (МИЭМ). Найти все первообразные для функции

$$f(x)=(2x-3)\cdot|x-2|$$

в промежутке $]-3;\ 1[$ и в промежутке $]1;\ 3[$.

Ответ: Первообразные для функции f на $]-3;\ 1[$ имеют вид $-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x+c$; на $]1;\ 3[$ вид

$$F(x)=\begin{cases} -\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x-\frac{10}{3}+A, & \text{если } 1<x<2 \\ A, & \text{если } x=2 \\ \frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x-\frac{10}{3}+A, & \text{если } 2<x<3. \end{cases}$$

7. (МИИГАиК). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{3}^{-18} \sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\,dx.$$

Ответ: $-\left(\frac{3}{2}\right)^3$.

8. (Витебский технологич. ин-т легкой промышленности). Вычислить

$$\int_{-1}^{0} |2^x - 2^{-x}|\, dx.$$

Ответ: $\frac{1}{2\ln 2}$.

9. (Витебский технологич. ин-т легкой промышленности). Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$, если

$$f(x) = \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x}.$$

Ответ: 1.

10. Вычислить интеграл

$$\int_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}}.$$

Ответ: $9\sqrt{3}$.

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=x$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=6-x$, $y=0$.

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

13. (МИНХ). Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=2-x^2$, $y=1$; $y=0$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$.

14. (МИЭТ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.

Ответ: 9.

15. (МАМИ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x+1$ и $y=5+3x-2x^2$.

Ответ: 9.

16. (МИСИ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+6x-1,\ y=0,\ x=1,\ x=3.$$

Ответ: $13\frac{1}{3}$.

17. (Куйбышевский гос. университет). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2x^2-8x+1 \text{ и } y=x^2-8x-\sqrt{3}x+1.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2+x$ и прямой $y=x+1$.

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

19. (МГУ, химический ф-т). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+4$, $y=-x^2+4x+1$, $y=5$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

20. (МГУ, химический ф-т). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2-4x+5,\ y=x^2+8x+17,\ y=1.$$

Ответ: 18.

21. (МГУ, физический ф-т). Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями

$$y=3x+18-x^2,\ y=0.$$

Ответ: $\frac{243}{2}$.

22. (МГУ, физический ф-т). Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями

$$y=0,\ y=24-2x-2x^2.$$

Ответ: $\frac{343}{3}$.

23. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^3 \text{ и } y=x.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

24. (МИФИ). Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{3}{x}$, прямыми $y=4$, $y=6$ и осью ординат.

Ответ: $3\ln\frac{3}{2}$.

25. (ЛГУ). Вычислить площадь криволинейного треугольника, лежащего в 1-й четверти и ограниченного линиями

$$xy=4,\ x=y,\ y=2x.$$

Ответ: $2\ln 2$.

26. (МГРИ). Дана функция $y=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$. Требуется:

а) произвести ее исследование с помощью производной и построить график;

б) найти площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и линией $y=5$.

Ответ: $15-16\ln 2$.

27. (МОПИ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{5}{x},\ y=6-x.$$

Ответ: $12-5\ln 5$.

28. (Казанский авиационный ин-т). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2,\ y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=2.$$

Ответ: $\frac{1}{3}+\ln 2$.

29. (МИФИ). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$3y=-x^2+8x-7 \text{ и } y+1=\frac{4}{x-3}.$$

Ответ: $9-8\ln 2$.

30. (МГПИ). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^3,\ y=\frac{1}{x},\ x=2.$$

Ответ: $\frac{15}{4}-\ln 2$.

31. (МИФИ). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y=1+\frac{1}{3(x-1)},\ y=\frac{1}{6x}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}\ln\frac{3e}{8}$.

32. (МГРИ). Дана функция $y=-1+8x^2-x^4$. Требуется:

а) произвести ее исследование с помощью производной и построить график;

б) найти площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и линиями $y=15$, $x=1$ $(x\geqslant 1)$.

Ответ: $3\frac{8}{15}$.

33. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sqrt{x}$ и прямой $x-3y+2=0$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

34. (МИСиС). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y=x^2 \text{ и } y=2\sqrt{2x}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

35. (МГПИ). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y=x^2 \text{ и } y=\sqrt[3]{x}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}$.

36. (МИЭТ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{4-3x},\ y=0.$$

Ответ: $\frac{8}{9}$.

37. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения графиков прямых $y=x$; $y=2x$ с графиком функции

$$y=3\cdot|x-20|.$$

Ответ: 810.

38. (КГУ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=\frac{|4-x^2|}{4} \text{ и } y=7-|x|.$$

Ответ: 32.

39. (ЛГПИ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=2^x;\ y=2;\ x=-1.$$

Ответ: $4-\frac{3}{2\ln 2}$.

40. (МИХМ). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x-2y+2=0,\ x=2.$$

Ответ: $3\left(1-\frac{1}{4\ln 2}\right)$.

41. (МГПИ). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1.$$

Ответ: $e+\frac{1}{e}-2$.

42. Вычислить площадь фигуры, определяемой неравенствами

$$2^x\leqslant y\leqslant 3-x^2,$$

если известно, что координаты всех точек этой фигуры удовлетворяют неравенству $x\geqslant 0$.

Ответ: $2\frac{2}{3}-\frac{1}{\ln 2}$.

43. (МИСиС). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2^x$, $y=4^x$ и прямой $x=1$.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln 2$.

44. (МИИГАиК). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$, причем $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Ответ: 2.

45. Найти площадь фигуры, составленной из точек (x, y), удовлетворяющих неравенствам:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\cos x.$$

Ответ: $\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

46. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\cos x,\ y=1+\frac{2}{\pi}x,\ x=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}-1$.

47. (Куйбышевский гос. университет). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sin\pi x,\ y=4(x^2-x).$$

Ответ: $\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3}$

48. (МГУ, филологический ф-т). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=0;\ y=\sin x;\ y=\cos x,\ x=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $2(\sqrt{2}-1)$.

49. (МИНХ). Найти площадь фигуры, ограниченной на отрезке $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right]$ графиками функций

$$y=\sin 2x,\ y=1-\sin 2x.$$

Ответ: $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

50. (МИИГАиК). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{1}{\cos^2 x},\ y=0,\ x=0 \text{ и } x=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: 1.

51. (Ярославский гос. университет). Какую часть площади квадрата отсекает парабола, проходящая через две соседние вершины квадрата и касающаяся его стороны в ее середине?

Ответ: $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

52. (Ярославский гос. университет). Какую часть площади полукруга отсекает парабола, проходящая через концы диаметра полукруга и касающаяся граничной окружности в точке, равноудаленной от концов диаметра?

Ответ: $\frac{3\pi-8}{3\pi}$ или $\frac{8}{3\pi}$.

53. (ЛГУ). Найти объем тела, полученного при вращении правильного шестиугольника вокруг его стороны длины a.

Ответ: $\frac{9}{2}\pi\cdot a^3$.

54. (МАДИ). Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^3,\ y=1,\ x=3.$$

Ответ: $310\frac{2}{7}\pi$.

55. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=\frac{1}{x^2}$, $x\in[1; 2]$, вокруг оси Ox.

Ответ: $\frac{21\pi}{8}$.

56. (Ярославский гос. университет). Из точки $P(-3; 9)$ кривой $y=x^2$ опущены перпендикуляры на оси координат. В каком отношении, считая от оси абсцисс, кривая $y=x^2$

делит площадь прямоугольника, образованного этими перпендикулярами и осями координат?

Ответ: 1:2.

57. (МГУ, биологический ф-т). Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y=0{,}5x^2-2x+2$ и касательными к ней в точке $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$: $y=-x+1{,}5$ и в точке (4; 2): $y=2x-6$.

Ответ: $\frac{9}{8}$.

58. (МГУ, биологический ф-т). Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-4x+5$ и касательными к ней в точке (1; 2): $y=-2x+4$ и в точке (4; 5): $y=4x-11$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

59. (МАДИ). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}+1$, $x=1$ и касательной, проведенной в точке $\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$ к кривой $y=\frac{1}{x}+1$.

Ответ: $\ln 2-\frac{5}{8}$.

60. (ЛГУ). Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=4x-x^2+1$ и касательными к нему, проведенными в точках с абсциссами $x=0$ и $x=3$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

61. Найти все $a>0$, для которых

$$\int_0^a (2-4x+3x^2)\,dx \leqslant a.$$

Ответ: $a=1$.

62. При каких a выполняется неравенство

$$\int_{-a}^{a} e^x\,dx > \frac{3}{2}.$$

Ответ: $a>\ln 2$.

63. При каких a выполняется неравенство

$$\int_a^0 (3^{-2x}-2\cdot 3^{-x})\,dx \geqslant 0.$$

Ответ: $a\geqslant 0$, $a\leqslant -1$.

64. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все числа $b>1$, для которых

$$\int_1^b (b-4x)\,dx \geqslant 6-5b.$$

Ответ: $b=2$.

65. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все числа q, для которых

$$\int_0^1 [q+(4-q)x+4q^2x^3]\,dx \leqslant \frac{17}{2}q-14.$$

Ответ: $q=4$.

66. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\int_0^{\alpha} \cos(x+\alpha^2)\,dx = \sin\alpha,$$

принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

Ответ: $\sqrt{2\pi}$; $\frac{\sqrt{8\pi+1}-1}{2}$.

67. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения уравнения

$$\int_{-u}^{u} \cos(x+2u^2-u)\,dx = -\sin 2u,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1-\sqrt{1+2\pi}}{2}$.

68. (МГУ, биологический ф-т). Найти числа A и B такие, чтобы функция вида

$$f(x)=A\sin\pi x+B$$

удовлетворяла условиям

$$f'(1)=2 \text{ и } \int_0^2 f(x)\,dx=4.$$

Ответ: $A=-\frac{2}{\pi}$; $B=2$.

69. (МГУ, биологический ф-т). Найти числа A и B такие, чтобы функция вида

$$f(x)=A\cdot 3^x+B$$

удовлетворяла условиям

$$f'(0)=2 \text{ и } \int_1^2 f(x)dx=12.$$

Ответ: $A=\frac{2}{\ln 3}$; $B=12-\frac{12}{\ln^2 3}$.

70. (МИФИ). Найти A, B, C такие, чтобы функция вида

$$f(x)=Ax^2+Bx+C$$

удовлетворяла условиям

$$f'(1)=8,\ f(2)+f''(2)=33,\ \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{7}{3}.$$

Ответ: $A=7$, $B=-6$, $C=3$.

71. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y=-x^2+ax \text{ и } y=|x-a|,$$

и найти a, при котором эта площадь будет иметь наибольшее значение, если известно, что $a\in]1;\ 7]$.

Ответ: $S(a)=\frac{1}{6}(a-1)^3$; $a_0=7$.

72. (КГУ). При каком значении a прямая $y=a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$ и $y=2+x-x^2$, пополам?

Ответ: $\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

73. (МИФИ). Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y=-8x-46$ и параболой $y=4x^2+ax+2$, если известно, что касательная к параболе в точке $x=-5$ составляет с осью Ox угол $\pi-\operatorname{arctg} 20$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

74. (МИФИ). Площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin 2x$, прямыми $x=\frac{\pi}{6}$, $x=a$ и осью абсцисс, равна 0,5. Определить a.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right\}$.

75. (ЛГУ). Для каких a ($a\in[0;\ 1]$) площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=0$, $x=1$, $y=f(a)$, имеет наибольшее и наименьшее значения, если $f(x)=x^\alpha+3x^\beta$, α, β — действительные числа, причем $\alpha>1$, $\beta>1$.

Ответ: Наибольшее — при $a=1$, наименьшее — при $a=\frac{1}{2}$.

76. (ЛГУ). Дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y=0$, $x=a$ ($a>0$) и $y=x^3$. Какую часть площади

трапеции составляет площадь треугольника, отсекаемого от данной трапеции касательной к линии $y=x^3$ в точке $x=\frac{2a}{3}$?

Ответ: $\frac{200}{243}$.

77. (МГУ, геологический ф-т). Найти значение A $(A\geqslant 0)$, при котором фигура, ограниченная параболами

$$y=(2\sqrt[3]{A}x-x^2)/(1+A^3) \text{ и } y=x^2/(1+A^3),$$

имеет наибольшую площадь.

Ответ: $A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

78. (МГУ, геологический ф-т). Найти значение A $(A\geqslant 0)$, при котором фигура, ограниченная параболой $y=(x^2+2Ax+3A^2)/(1+A^4)$ и прямой $y=(A^2-Ax)/(1+A^4)$, имеет наибольшую площадь.

Ответ: $A=\sqrt[4]{3}$.

79. (МГУ, геологический ф-т). Найти значение параметра p $(p\geqslant 0)$, при котором площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y=x^2+x\sqrt[3]{p/(1+p^2)}+1$$

и прямой $y=2x\sqrt[3]{p/(1+p^2)}+1$, достигает наибольшего значения.

Ответ: $p=1$.

80. (МГУ, геологический ф-т). Найти значение параметра p $(p\geqslant 0)$, при котором площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y=-(1+p^2)^2x^2+p$$

и прямой $y=0$, достигает наибольшего значения.

Ответ: $p=\sqrt{3}$.

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Некоторые методы доказательства неравенств и сравнения чисел приведены в § 4 главы I.

1. Доказать, не пользуясь таблицами, что

$$\log_4 9>\log_5 11;$$

$$\log_5 14>\log_7 18;$$

$$\log_3 7>\log_7 27;$$

$$\log_2 7+\left(3+\cos\frac{15}{7}\right)\cdot\log_7 2<4;$$

$$\lg \lg (2^{10000!}) > 2500;$$

$$2^{3^{100}} > 123^{2^{150}};$$

$$3^{3^{100}} > 7^{2^{154}};$$

$$2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > 1.$$

2. Не пользуясь таблицами, определить, что больше:

$\log_3 75$ или $\log_2 22$;

$\log_4 60$ или $\log_3 30$;

$\log_3 70$ или $\log_2 20$;

$\log_3 10 + 4 \lg 3$ или 4;

$\dfrac{10^{1976}+1}{10^{1977}+1}$ или $\dfrac{10^{1769}+1}{10^{1770}+1}$;

$\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}$ или $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{1}{7}}$;

$\log_{20} 80$ или $\log_{80} 640$;

e^{π} или π^{e};

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{10}$;

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ или 2;

$\cos(\sin 1^\circ)$ или $\sin(\cos 1^\circ)$;

$\cos(\sin 20^\circ)$ или $\sin(\cos 20^\circ)$;

$\sin 100$ или 0;

$\sqrt[200]{2}$ или 1, 01;

$\sqrt{2}+\sqrt{11}$ или $\sqrt{3}+3$;

$\sqrt[3]{2}$ или $\sqrt[7]{5}$;

999^{1000} или 1000^{999};

$\sin 3$ или $\log_3 2$;

$(\log_{2\sqrt{2}} 4)(\log_9 3\sqrt{3})^2$ или $2 \sin \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos^2 \dfrac{23\pi}{4} \operatorname{tg} \dfrac{37\pi}{4}$.

В задачах 3—15 доказать, что если a, b, c, d — поло-

жительные числа, то

3. $(a+b+c+d)^4 \geqslant 256abcd$;

4. $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$;

5. $\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{2ab-b^2}>a$;

6. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$;

7. $2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$;

8. $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geqslant 16abc$;

9. $\sqrt[4]{ab^3} \leqslant \frac{a+3b}{4}$;

10. $ab^2c^3d^4 \leqslant \left(\frac{a+2b+3c+4d}{10}\right)^{10}$;

11. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$;

12. $\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leqslant \sqrt[4]{abcd}$;

13. $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc}$;

14. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b) \geqslant 0$;

15. $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$.

16. (МГУ, филологический ф-т). Доказать, что

$$11n^2-14n+3 \geqslant 0$$

при всех целых n.

17. Доказать, что

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c).$$

18. Доказать, что при всех x

$$x^{12}-x^9+x^6-x^3+1>0.$$

19. Доказать, что многочлен $x^8+x^7+x^4-x+1$ не имеет действительных корней.

20. Доказать, что при всех x

$$\cos(\sin x)>\frac{1}{2}.$$

21. Доказать, что при всех x

$$|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}.$$

22. Доказать, что при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \leqslant 1.$$

23. Доказать неравенство

$$\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant 1.$$

24. Доказать, что $\operatorname{tg} x \geqslant x$ при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

25. Доказать, что для любого натурального n

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n \leqslant n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

26. Доказать, что при $n \geqslant 2$ (n — натуральное число) справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

27. Доказать неравенство

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3.$$

28. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

29. Доказать, что если $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ и все $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то $(1+a_1)(1+a_2) \cdot \ldots \cdot (1+a_n) \geqslant 2^n$.

30. Доказать неравенство

$$1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \ldots + \frac{1}{n^{3/2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

31. Дано $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = n$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$ Доказать, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

32. Доказать, что

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

и

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

33. Доказать, что среднее арифметическое $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ заключено между наименьшим и наибольшим из чисел $a_1, \ldots, a_n$.

34. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа и $n=2^k$, где k — натуральное число, то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

35. Доказать, что если $a_1>0$, $a_2>0$, ..., $a_n>0$, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

36. Доказать, что если $a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{1}{n}$, то $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

37. Доказать, что если $b_1+b_2+\ldots+b_n \neq 0$, то дробь $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ заключена между наибольшей и наименьшей из дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$.

§ 7. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Некоторые методы решения задач с параметрами приведены в § 5 главы I.

1. (МГУ, геологический ф-т). При каких значениях a корни квадратного уравнения

$$x^2-(2a+1)x+2a=0$$

равны между собой?

Ответ: $a=\frac{1}{2}$.

2. (МГУ, филологический ф-т). Найти все те значения b, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-2bx-1=0$$

действительны и не превосходят по модулю 2.

Ответ: $\left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$.

3. (МГУ, филологический ф-т). Найти все те значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-6ax+(2-2a+9a^2)=0$$

больше, чем 3.

Ответ: $a > \frac{11}{9}$.

4. (МГУ, физический ф-т). Найти все значения a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ больше a.

Ответ: $a<-2$.

5. (МГУ, физический ф-т). Найти все значения m для которых неравенство $mx^2-4x+3m+1>0$ будет выполнено при всех $x>0$.

Ответ: $m>1$.

6. (МГУ, физический ф-т). Найти, при каких значениях m квадратный трехчлен x^2+mx+m^2+6m отрицателен при всех x, удовлетворяющих условию $1<x<2$.

Ответ: $-\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \leqslant m \leqslant -4+2\sqrt{3}$.

7. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения a, для которых при всех x, не превосходящих по модулю единицы, справедливо неравенство

$$2x^2-4a^2x-a^2+1>0.$$

Ответ: Ни при каких.

8. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$ax^2+(1-a^2)x-a>0,$$

по модулю не превосходит двух.

Ответ: $-2 \leqslant a \leqslant -\frac{1}{2}$.

9. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения a, при которых из неравенства $ax^2-x+1-a<0$ следует неравенство $0<x<1$.

Ответ: $a \geqslant 1$.

10. (МГУ, филологический ф-т). Для каждого a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

Ответ:
$a<0$ нет решений;
$a=0$ три решения;
$0<a<1$ четыре решения;
$a=1$ два решения;
$a>1$ нет решений.

11. (МГУ, экономический ф-т). Определить, при каких a неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Ответ: $]-3\frac{1}{4}; 3[$.

12. (МГУ, экономический ф-т). Определить, при каких

a уравнение

$$\log_2(4^x - a) = x$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $]-\frac{1}{4}; 0[$.

13. (МГУ, биологический ф-т). Найти все значения a, при которых уравнение

$$x|x+2a|+1-a=0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $]-\infty; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[\cup]1; +\infty[$.

14. (МГУ, биологический ф-т). Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $]-\infty; -\frac{7}{3}[\cup]-2; +\infty[$.

15. (МГУ, географический ф-т). Найти все значения действительного параметра a, для которых неравенство

$$4^x - a\cdot 2^x - a + 3 \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $[2; +\infty[$.

16. (МГУ, физический ф-т). Для каждого a найти все решения уравнения

$$x + \sqrt{x} = a.$$

Ответ: При $a \geqslant 0$ $x = \left(\sqrt{\frac{1}{4} + a} - \frac{1}{2}\right)^2$;

при $a < 0$ решений нет.

17. (МГУ, физический ф-т). Для каждого вещественного числа a решить неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 2^{|a|}}{x^2 - a^2} > 0.$$

Ответ: При $a \neq 0$ $]-\infty; -|a|[\cup]|a|; +\infty[$;

при $a = 0$ $]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

18. (МГУ, физический ф-т). Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$144^{|x|} - 2\cdot 12^{|x|} + a = 0.$$

Ответ: $a<1$, $x_{1,2}=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$;
$a=1$, $x=0$;
$a>1$, решений нет.

19. (МГУ, физический ф-т). Для каждого a решить уравнение

$$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a.$$

Ответ: При $0<a<1$, $x_{1,2}=\pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$;
при $a=1$, $x=0$;
при остальных a решений нет.

20. (МГУ, механико-математический ф-т). Указать все значения a, при которых уравнение

$$\log_{100}x^2=\log_{\sqrt{x}}10\left(\lg 10a-\left|\lg\frac{x}{a}\right|\right)$$

имеет решения, и найти все соответствующие решения.

Ответ: $a<10^{1-\sqrt{3}}$, нет решений;

$$a=10^{1-\sqrt{3}},\ x=10^{1-\sqrt{3}};$$

$$10^{1-\sqrt{3}}<a<10^{1+\sqrt{3}},\ x_1=10^{1-\sqrt{3}},\ x_2=10^{-1+\sqrt{3+4\lg a}};$$

$$a\geqslant 10^{1+\sqrt{3}},\ x_1=10^{1-\sqrt{3}},\ x_2=10^{1+\sqrt{3}}.$$

21. (МГУ, ВМК). Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos^4x-(a+2)\cos^2x-(a+3)=0$$

имеет решения, и найти все эти решения.

Ответ: $-3\leqslant a\leqslant -2$; $x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

22. (МГУ, биологический ф-т). Найти все значения действительного параметра p, при которых квадратное уравнение

$$(3x)^2+(3^{\frac{1}{p}+3}-15)x+4=0$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $p=-\frac{1}{2}$.

23. (МГУ, ф-т почвоведения). Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-\frac{a}{4}}{x-2a}<0$$

выполняется для всех x таких, что $2\leqslant x\leqslant 4$.

Ответ:]2; 8[.

24. (МГУ), филологический ф-т). Найти все x, для которых $0{,}5<x<2{,}5$ и которые удовлетворяют неравенству $\log_{3x-x^2}(3a-ax)<1$ при всех a из промежутка $0<a<2$.

Ответ: [2; 2,5[.

25. (МГУ, экономический ф-т). Найти все действительные a, при каждом из которых неравенство

$$a^2+a-\sin^2 x-2a\cos x>1$$

выполняется для любого действительного числа x.

Ответ: $]-\infty; -\frac{3+\sqrt{13}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$.

26. (МГУ, ф-т психологии). Найти множество таких пар действительных чисел (a, b), для каждой из которых при всех $x\in\mathbf{R}$ справедливо равенство

$$a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1.$$

Ответ: (0; 0), (1; 0).

27. (МГУ, экономический ф-т). Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$2a-4+a(3-\sin^2 x)^2+\cos^2 x<0$$

выполняется для всех x.

Ответ: $]-\infty; -3-\sqrt{3}[\cup]-1+\sqrt{3}; +\infty[$.

28. (МГУ, геологический ф-т). Найти все значения k, при которых неравенство

$$\frac{x^2+k^2}{k(6+x)}\geqslant 1$$

выполняется для всех x, удовлетворяющих условию

$$-1<x<1.$$

Ответ: $\left[\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

29. (МГУ, ф-т психологии). Найти все действительные значения a, при которых уравнение $x^8+ax^4+1=0$ имеет ровно четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

Ответ: $a=-9\frac{1}{9}$.

30. (МГУ, филологический ф-т). Найти значения x, удовлетворяющие уравнению

$$2\log_{2+a^2}(4-\sqrt{7+2x})=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)$$

при любом действительном a.

Ответ: $x=1$.

31. (МГУ, ф-т психологии). При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 3x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x+\frac{a}{2}=0$$

имеет ровно три корня, расположенные на отрезке $\frac{2}{3}\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

Ответ: $a=1$.

32. (МГУ, филологический ф-т). Определить, для каких a неравенство

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2)>1$$

выполняется при любом действительном x.

Ответ: $a<-2$.

33. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти, при каких значениях p уравнение $1+p\sin x=p^2-\sin^2 x$ имеет решение.

Ответ: $-2\leqslant p\leqslant-\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}\leqslant p\leqslant 2$.

34. (МГУ, биологический ф-т). Найти все те значения параметра s, при каждом из которых все корни уравнений

$$x^2+3x+2s=0 \text{ и } x^2+6x+5s=0$$

различны и перемежаются, т. е. оба уравнения имеют два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

Ответ: $]0;\ 1[$.

35. (МГУ, ВМК). Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства

$$0{,}36^{\frac{1}{(3x+2)^2}}\leqslant(0{,}6)^{\frac{2}{(x+8)^2}}$$

является решением неравенства $25a^4x^2-4\leqslant 0$.

Ответ: $\left[-\sqrt{\frac{2}{15}};\ \sqrt{\frac{2}{15}}\right]$.

36. (МГУ, биологический ф-т). Найти все значения действительного параметра c, для которых неравенство

$$1+\log_5(x^2+1)\geqslant\log_5(cx^2+4x+c)$$

справедливо при всех x.

Ответ: $]2;\ 3]$.

37. (МГУ, механико-математический ф-т). При каких значениях a неравенство

$$\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cdot\cos x\geqslant 0$$

выполняется при всех x?

Ответ: $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

38. (МГУ, ф-т психологии). Определить, при каких a система имеет хотя бы одно решение

$$\begin{cases} x^2-(y-a)^2\geqslant 1, \\ y=x^2+1. \end{cases}$$

Ответ: $]\frac{7}{4};\ +\infty[$.

39. (МГУ, филологический ф-т). Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5y^8=a, \\ x^7y^{11}=b. \end{cases}$$

Ответ: $a=0,\ b\neq 0$ — нет решений;
$b=0,\ a\neq 0$ — нет решений;
$a=0,\ b=0$ — $x=0$, y — любое или x — любое, $y=0$
$a\neq 0,\ b\neq 0$ — $x=\frac{b^8}{a^{11}},\ y=\frac{a^7}{b^5}$.

40. (МГУ, биологический ф-т). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a_1=0$, $a_2=2$.

41. (МГУ, физический ф-т). Найти все значения a, для которых x и y, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x>y$.

Ответ: $a<6$.

42. (МГУ, геологический ф-т). Указать все действительные a, при которых не существует ни одного действительного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3)\geqslant 0, \\ ax\geqslant 4. \end{cases}$$

Ответ: $-2<a\leqslant 0$.

43. (МГУ, экономический ф-т). Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b+1)\,y = 2b + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $b \neq 0$.

44. (МГУ, геологический ф-т). При каких действительных значениях параметра a существует хотя бы одно действительное x, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)\,x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $]-\sqrt{2};\ -\frac{16}{17}[\cup]0;\ \sqrt{2}[$.

45. (МГУ, геологический ф-т). Найти все неотрицательные числа p, при которых существует единственное действительное число x, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\operatorname{tg} \pi x = 0,$$

$$(5x + 25p + 19)\,(2p - 13 - 4x) \geqslant 0.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2};\ \frac{6}{25}\right[$.

46. (МГУ, географический ф-т). Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x\,|x| = 0, \\ x^2 - 2\,(a-1)\,x + a\,(a-2) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1\}\cup]1;\ 3[\cup]4;\ 6]$.

47. (МГУ, ВМК). Найти все положительные числа a, для которых не существует действительных чисел x и y, одновременно удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} 16x^2 + (4 - 5a)\,(x^3 + x) - \frac{5}{4}\,a\,(x^2+1)^2 \leqslant 0, \\ \frac{4x}{x^2+1} = \frac{1-y}{5y} + \frac{ay}{1-y} + \frac{a}{4}, \\ 0 < y < 1. \end{cases}$$

Ответ: $]0;\ \frac{4}{5}[\cup]\frac{72 - 16\sqrt{14}}{5};\ +\infty[$.

48. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

Ответ: $a=0$.

49. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения α, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leqslant 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $\alpha=0$; $\alpha=1$.

50. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все значения параметра α, при которых система неравенств

$$\begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \geqslant \dfrac{3\alpha+1}{\alpha+2}, \\ 3x^2 + xy + y^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

имеет решение.

Ответ: $]-2;\ +\infty[$.

51. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все действительные значения α, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа (x, y, u, v), удовлетворяющие равенствам

$$(x+y)(x+y+20) = (140-\alpha)(\alpha-80),$$

$$\alpha(8u^2+2v^2-\alpha) = (4u^2-v^2)^2.$$

Ответ: $\alpha=100$.

52. (МГУ, механико-математический ф-т). Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2+ax+ac=0$,

2) $x^2-bx+c^3=0$,

3) $x^4-bx^2+c^3=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый из корней первого уравнения является корнем третьего уравнения и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c.

Ответ: $a=-2$, $b=20$, $c=4$.

53. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все те числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$2\sin^7 x = (1+\sin \pi a)\sin x + a\sin^3 x$$

является корнем уравнения

$$(a-1)(1+\cos^2 x) + 2\sin^6 x = 2\sin^2 x + 2(a-1)^3$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ: $\{1; 2\}$.

54. (МГУ, экономический ф-т). При каких h уравнение

$$x^4 + (h-1)x^3 + x^2 + (h-1)x + 1 = 0$$

имеет не менее двух различных отрицательных корней?

Ответ: $h \geqslant \frac{5}{2}$.

55. (МГУ, экономический ф-т). Найти все действительные значения α, при которых уравнение

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = \alpha$$

имеет не менее трех отрицательных корней.

Ответ: $-1 < \alpha < \frac{9}{16}$.

56. (МГУ, экономический ф-т). При каком h многочлен от x

$$y = x^4 - 2^{\operatorname{tg} h} \cdot x^2 + (\cos h + \cos 2h)x + 2^{\operatorname{tg} h - 2}$$

является квадратом квадратного трехчлена от x?

Ответ: $h = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

57. (МГУ, геологический ф-т). При каких целых значениях k система

$$\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 \cdot k, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Ответ: $k = 1$; $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{7})$, $y = \cos\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{7})$.

58. Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} \cos(y-b) - 2\cos x = 0, \\ \log_2(by - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{\frac{1}{2}}(3y) \end{cases}$$

имеет нечетное число решений.

Ответ: $\frac{3\pi}{2}(4n-1) \geqslant b > \frac{3\pi}{2}(4n-3)$, $n \in \mathbf{N}$.

§ 8. ПЛАНИМЕТРИЯ

Напомним некоторые теоремы и формулы планиметрии.

Четыре замечательные точки и линии в треугольнике

а) Во всяком треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

б) Во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке; эта точка отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

в) Все три перпендикуляра, проведенные к сторонам треугольника через их середины, пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной вокруг треугольника окружности.

г) Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Пропорциональные отрезки

а) Параллельные прямые (KM и LN, рис. 27), пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки

$$\frac{|OK|}{|OM|} = \frac{|KL|}{|MN|}.$$

б) Биссектриса (BD, рис. 28) любого угла треугольника (ABC) делит противоположную сторону на части (AD и DC), пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

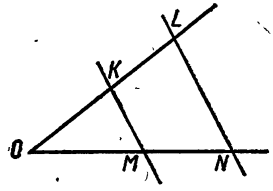


Рис. 27

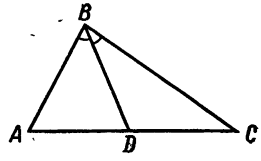


Рис. 28

в) Если через точку (M, рис. 29), взятую внутри круга проведено сколько угодно хорд (AB, EF, KL, ...), то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для

всех хорд

$$|AM| \cdot |MB| = |KM| \cdot |ML| = |EM| \cdot |MF| = \ldots = \text{const}.$$

г) Если из точки (M, рис. 30), взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая (MA) и касательная

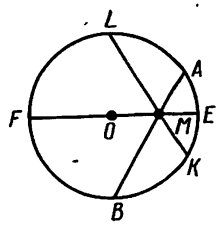


Рис. 29

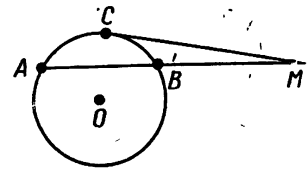


Рис. 30

(MC), то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной $|MA| \cdot |MB| = |MC|^2$.

Вписанные и описанные четырехугольники

а) Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин противоположных сторон были равны между собой.

б) Для того чтобы вокруг выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма двух противоположных углов была равна $2d$.

Теорема синусов. Во всяком треугольнике (ABC) отношение длины любой стороны к синусу противолежащего угла постоянно и равно диаметру описанной вокруг треугольника окружности:

$$\frac{|AB|}{\sin \widehat{BCA}} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{|AC|}{\sin \widehat{ABC}} = 2R$$

(R — радиус описанной окружности).

Теорема косинусов. Во всяком треугольнике (ABC) квадрат одной из сторон (BC) равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус угла, заключенного между ними:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{BAC}.$$

Площадь треугольника

Пусть в треугольнике ABC

$$|BC| = a, \ |AC| = b, \ |AB| = c$$

и

$$\widehat{BAC} = \alpha,\ \widehat{ABC} = \beta,\ \widehat{BCA} = \gamma.$$

Для нахождения площади треугольника S наиболее употребительны следующие формулы (выведите их!):

а) $S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$

где h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника, проведенных к соответствующим сторонам;

б) $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$

в) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Если длина радиуса окружности, вписанной в треугольник, равна r, а длина радиуса описанной окружности — R, то имеют место соотношения:

г) $S = p \cdot r;$

д) $S = \frac{abc}{4R}.$

Другие формулы

Если длины диагоналей выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_2 и диагонали образуют угол величины α, то площадь четырехугольника дается формулой

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha.$$

Площадь параллелограмма можно вычислить по формулам

$$S = a \cdot h \quad \text{или} \quad S = a \cdot b \cdot \sin \alpha,$$

где a, b — длины смежных сторон параллелограмма, h — длина высоты, α — величина угла между смежными сторонами.

Площадь трапеции с основаниями длины a и b и высотой длины h дается формулой

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Длина окружности $C = 2\pi \cdot R$.

Площадь круга $S = \pi \cdot R^2$.

Если α — число радианов в центральном угле круга радиуса R, то

а) длина дуги l, на которую опирается центральный угол, равна $l=R\cdot\alpha$;

б) площадь S соответствующего центрального сектора равна

$$S=\frac{1}{2}R^2\cdot\alpha,$$

где R — длина радиуса круга.

Задачи

1. Доказать, что длина медианы в треугольнике меньше полусуммы длин заключающих ее сторон.

2. Доказать, что биссектриса прямого угла в треугольнике делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла.

3. Доказать, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы с вершинами A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры DF и BE. Доказать, что

$$|CE|=|FA|.$$

5. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, $\widehat{CAB}=\frac{\pi}{3}$, радиус описанной окружности равен 2,2. Доказать, что длина высоты, опущенной из вершины C на AB, строго меньше $11\sqrt{3}/5$.

6. (МГУ, геологический ф-т). В треугольнике ABC известны сторона $|AC|=3$, угол $BAC=\frac{\pi}{6}$ и радиус описанной окружности $R=2$. Доказать, что площадь треугольника ABC строго меньше 3.

7. (МГУ, химический ф-т). В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 проведена высота CD из вершины C прямого угла. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

Ответ: $\sqrt{2}$.

8. Правильный треугольник ABC со стороной длины 3 вписан в окружность; точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найти длины хорд BD и CD.

9. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в 3 раза больше длины окружности, вписанной в этот треугольник. Найти углы треугольника.

10. (МГУ, химический ф-т). В треугольнике ABC сторона $BC=5$. Окружность проходит через вершины B и C и пересекает сторону AC в точке K так, что $CK=3$, $KA=1$. Известно, что косинус угла ACB равен 4/5. Найти отношение радиуса данной окружности к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABK.

Ответ: $\frac{5(5+2\sqrt{10})}{9}$.

11. (МГУ, ВМК). В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$.

12. (МГУ, географический ф-т). В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен 120°. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.

13. (МГУ, геологический ф-т). Точки E, F, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC, причем $|AE|=|AB|/3$, $|BF|=|BC|/6$, $|AM|=2|AC|/5$. Найти отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC.

14. Площадь треугольника ABC равна S

$$\widehat{CAB}=\alpha,\ \widehat{ABC}=\beta,\ \widehat{ACB}=\gamma.$$

Определить высоты треугольника.

15. (МГУ, геологический ф-т). Дан треугольник ABC. Известно, что $|AB|=4$ см, $|AC|=2$ см, $|BC|=3$ см. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найти длину отрезка KM.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

16. (МГУ, геологический ф-т). В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $|BO|:|OE|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Найти острые углы треугольника.

Ответ: 15°, 75°.

17. (МГУ, ВМК). В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL=a$ и медиана $CM=b$. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{a^2+a\sqrt{a^2+8b^2}}{4}$.

18. (МГУ, географический ф-т). Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти площадь треугольника ABC, зная, что $\angle ABC=\beta$ и $\angle CAB=\alpha$.

Ответ: $\frac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

19. (МГУ, геологический ф-т). В треугольнике ABC известны стороны: $|AB|=6$ см, $|BC|=4$ см, $|AC|=8$ см. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D, C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найти площадь треугольника ADE.

Ответ: $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ см^2.

20. (МГУ, химический ф-т). В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $AEKM$ так, что K лежит на гипотенузе, а E и M — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник ABC, как $(2+\sqrt{2}):2$. Найти углы треугольника.

Ответ: 45° и 45°.

21. (МГУ, геологический ф-т). Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30°, $|AB|=4$ см, $|BC|=6$ см. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

Ответ: 2,4 см^2.

22. (МГУ, геологический ф-т). В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K так, что $|AK|=1$, $|KC|=3$, а на стороне AB взята точка L так, что $|AL|:|LB|=2:3$. Пусть Q — точка пересечения прямых BK и CL. Площадь треугольника AQC равна 1. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

23. (МГУ, биологический ф-т). В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найти площадь четырехугольника $ADOE$, зная, что $|BC|=a$ и $|AC|=b$.

Ответ: $\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$.

24. (МГУ, геологический ф-т). Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка P, а на стороне AC взята точка M так, что $\angle APB=\angle BMA=\frac{\pi}{4}$. Отрезки AP и BM пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников BOP и AOM равны между собой, $|BC|=1$ см, $|BO|=\sqrt{2}/2$ см. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: 0,3 см^2.

25. (МГУ, географический ф-т). В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a, угол $ABC=120°$. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Вторая окружность с центром в точке E проходит через точку D. Найти площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

Ответ: $\dfrac{a^2(7-4\sqrt{3})\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)}{4}$.

26. (МГУ, ф-т почвоведения). Дан треугольник ABC, у которого стороны $|AB|=\sqrt{17}$, $|BC|=5$, $|AC|=4$. На стороне AC взята точка D так, что BD является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся в точке D окружности, описанной около треугольника BCD.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

27. (МГУ, ВМК). Около треугольника APK описана окружность радиуса 1. Продолжение стороны AP за вершину P отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину K, отрезок BK, равный 7. Найти площадь треугольника APK, если известно, что угол ABK равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{7}$.

Ответ: $\frac{28}{53}$.

28. (МГУ, механико-математический ф-т). Вокруг треугольника ABC описана окружность. Через точку B проведена касательная к этой окружности до пересечения с продолжением стороны CA в точке D. Известно, что $|AB|+|AD|=|AC|$, отрезок $|CD|=3$, угол $BAC=60°$. Найти периметр треугольника ABC.

Ответ: $3+\sqrt{3}$.

29. (МГУ, механико-математический ф-т). В треугольнике ABC $|AB|=20$ м, $|AC|=24$ м. Известно, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой лежит на стороне AC. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: 12,5 м.

30. (МГУ, механико-математический ф-т). В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

31. (МГУ, географический ф-т). В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC, а вершины M и P—на катетах AC и AB соответственно. Длина катета AC равна 3 см, а катета AB — 4 см. Найти длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $\frac{5}{3}$ см^2, а периметр меньше 9 см.

Ответ: $\frac{5}{6}$ см, 2см.

32. (МГУ, экономический ф-т). В плоскости даны квадрат с последовательно расположенными вершинами A, B, C, D и точка O. Известно, что $|OB|=|OD|=13$, $|OC|=5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше 225. Найти длину стороны квадрата и выяснить, где расположена точка O — вне или внутри квадрата.

Ответ: 17, точка O расположена внутри квадрата.

33. (МГУ, географический ф-т). Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности?

Ответ: $\sqrt{10}$.

34. (МГУ, ф-т почвоведения). В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

Ответ: $\frac{4(2\sqrt{3}+3)}{3}$.

35. (МГУ, биологический ф-т). В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $2\pi/3$. Точки E и F лежат на сторонах BC и AD соответственно, отрезок EF и диагональ ромба AC пересекаются в точке M. Площади четырехугольников $BEFA$ и $ECDF$ относятся как 1:2. Найти длину отрезка EM, если $|AM|:|MC|=1:3$.

Ответ: $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

36. (МГУ, механико-математический ф-т). Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $|AB|=1$, $|BC|=2$ и угол ABC тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямых, одна из которых перпендикулярна стороне AB, а другая — перпендикулярна стороне BC. В пересечении этих че-

тырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $S=1{,}2$.

37. (МГУ, физический ф-т). В параллелограмме со сторонами 2 и 4 проведена диагональ длиной 3. В каждый из получившихся треугольников вписано по окружности. Найти расстояние между центрами окружностей.

Ответ: $\sqrt{\frac{17}{3}}$.

38. (МГУ, механико-математический ф-т). Два равных ромба $ABCD (AB \| CD,\ AD \| BC)$ и $APQR (AP \| QR,\ AR \| PQ)$ имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD = \angle PAR = \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\angle QAC = \beta$. Продолжения сторон BC и QR пересекаются в точке K. Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AK и в одной полуплоскости относительно прямой AD. Найти угол KAD.

Ответ: $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

39. (МГУ, географический ф-т). В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 2 м, а длина основания BC равна 1 м. Длины боковых сторон AB и CD равны по 1 м. Найти длину диагонали трапеции.

Ответ: $\sqrt{3}$ м.

40. (МГУ, химический ф-т). В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $|BN| : |NC| = 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найти отношение $|AM| : |MD|$.

Ответ: 3:4.

41. (МГУ, географический ф-т). Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

Ответ: $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

42. (МГУ, ф-т почвоведения). Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

Ответ: $\frac{3}{4}ab$.

43. (МГУ, химический ф-т). В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2 см. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В тре-

угольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H. Длина отрезка MH равна 1 см. Найти величину угла BAD.

Ответ: 120°.

44. (МГУ, механико-математический ф-т). В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти площадь трапеции.

Ответ: 6.

45. (МГУ, механико-математический ф-т). Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность, касающуюся всех ее сторон. Средняя линия трапеции делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найти длины оснований трапеций.

Ответ: 1 и 7.

46. (МГУ, физический ф-т). Дана равнобочная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти углы трапеции.

Ответ: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

47. (МГУ, физический ф-т). В круг радиуса R с центром в точке O вписана трапеция $ABCD$ ($BC<AD$ и точка O лежит внутри трапеции). Непараллельные стороны трапеции AB и CD равны R. Точка K — середина радиуса OA, точка L — середина радиуса OD, точка M — середина стороны BC. Отношение площади трапеции к площади треугольника KLM равно 4. Найти длину отрезка MC.

Ответ: $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

48. (МГУ, геологический ф-т). Дана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB которой перпендикулярна основаниям. В трапецию вписана окружность с центром в точке O. Через точки A, B, C проведена окружность с центром в точке O_1. Найти диагональ AC, если $|OO_1|=1$ см, а меньшее основание $|BC|=10$ см.

Ответ: $\sqrt{244}$ см.

49. (МГУ, ВМК). На боковых сторонах KL и MN равнобочной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность, и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Определить основания LM и KN.

Ответ: $\frac{2r^2}{\sqrt{Rr}}, \frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}$.

50. (МГУ, физический ф-т). В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\frac{\pi}{4}$, угол D равен $\frac{\pi}{3}$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найти отношение длины отрезка AE к длине отрезка ED.

Ответ: $\sqrt{3}$.

51. (МГУ, ф-т психологии). Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ (вершины обозначены последовательно) является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если

$$|BD| = 2, |AB| = 1, \widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 4 : 3.$$

Ответ: $|AC| = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

52. (МГУ, биологический ф-т). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B — прямые, величина угла при вершине D равна 45°, длина стороны BC равна 1 м, длина диагонали равна 5 м. Найти площадь этого четырехугольника.

Ответ: $\frac{15}{2}$ м^2.

53. (МГУ, ф-т психологии). В окружность радиуса 6 см вписан четырехугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Точки E и F являются соответственно серединами AC и BD. Центр окружности — O, точка пересечения диагоналей — K. Длина отрезка OK равна 5 см, а площадь четырехугольника $OEKF$ равна 12 см^2. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ: $12\sqrt{15}$ см^2.

54. (МГУ, филологический ф-т). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = 45°$, $\widehat{EBD} = 30°$ и $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника?

Ответ: $1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

55. (МГУ, экономический ф-т). В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60°. Найти диагонали четырехугольника.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

56. (МГУ, химический ф-т). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна одному мет-

ру. Найти длину отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD.

Ответ: 1 м.

57. (МГУ, механико-математический ф-т). На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ находится центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC. На диагонали BD находится центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

Ответ: $4\cdot(\sqrt{2}+1)r^2$.

58. (МГУ, географический ф-т). В круговом секторе OAB, величина центрального угла которого равна 45°, расположен прямоугольник $KMPT$. Сторона KM прямоугольника лежит на радиусе OA, вершина P — на дуге AB, вершина T — на радиусе OB. Длина стороны KT на 3 см больше длины стороны KM. Площадь прямоугольника $KMPT$ равна 18 см^2. Найти длину радиуса.

Ответ: $3\sqrt{13}$ см.

59. (МГУ, ф-т почвоведения). Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

Ответ: 7.

60. (МГУ, биологический ф-т). Отрезок AB есть диаметр круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BC пересекаются с окружностью в точках D и M соответственно. Найти угол CBD, если площади треугольников DCM и ACB относятся как 1:4.

Ответ: 30°.

61. (МГУ, биологический ф-т). Дана окружность с центром O и радиусом, длина которого равна двум. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная к окружности AK. Величина угла OAK равна 60°. Найти длину радиуса окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

Ответ: $2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

62. (МГУ, ф-т почвоведения). В окружность радиуса $(3+\sqrt{3})$ вписан правильный шестиугольник $ABCDEK$. Найти радиус круга, вписанного в треугольник ACD.

Ответ: $\sqrt{3}$.

63. (МГУ, химический ф-т). Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD=2$, $BD=1$, $DC=\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

64. (МГУ, биологический ф-т). В круге проведены два диаметра AB и CD, M — некоторая точка. Известно, что $AM=15$, $BM=20$, $CM=24$. Чему равно $|DM|$?

Ответ: $|DM|=7$.

65. (МГУ, геологический ф-т). На отрезке AB длины l как на диаметре построена окружность. Вторая окружность, радиус которой равен половине радиуса первой окружности, касается ее внутренним образом в точке A. Третья окружность касается первой окружности внутренним образом, второй окружности — внешним образом, а также касается отрезка AB. Найти радиус третьей окружности.

Ответ: $\frac{2l}{9}$ см.

66. (МГУ, биологический ф-т). Центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат по разные стороны от прямой AB. Длина стороны AB равна радиусу описанной окружности. O — центр вписанной окружности. Чему равен угол AOB?

Ответ: $\frac{11\pi}{12}$.

67. (МГУ, геологический ф-т). На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. Длина хорды AB равна $\sqrt{6}$ см, длина хорды CD равна $\sqrt{7}$ см. Найти радиус окружности.

Ответ: $R=\sqrt{2}$ см.

68. (МГУ, физический ф-т). Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB — в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $|CN|=a$, $|DN|=b$. Найти $|MN|$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

§ 9. СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. (МГУ, ф-т почвоведения). Дан прямоугольник, длины сторон которого равны 1 см и 2 см. Меньшая сторона прямоугольника лежит на плоскости P, а диагональ прямоугольника образует с плоскостью P угол, величина которого равна α. Найти величину угла между плоскостью прямоугольника и плоскостью P.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{5}\sin\alpha}{2}$.

2. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами длины 2. Найти периметр четырехугольника, зная, что длина одной из его сторон равна $\sqrt{5}$.

3. (МГУ, геологический ф-т). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 1 см. На ребрах BB_1 и DD_1 взяты точки K и P соответственно, причем $|BK|:|B_1K| = 1:3$, $|DP| = |PD_1|$. Плоскость, проведенная через точки A, K и P, пересекает диагонали A_1D и B_1C в точках M и T соответственно. Найти длину отрезка MT.

Ответ: $\sqrt{\frac{19}{18}}$ см.

4. (МГУ, физический ф-т). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

Ответ: $\frac{11}{\sqrt{170}}$.

5. (МГУ, химический ф-т). В прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$, а AA', BB', CC', DD' — боковые ребра, вписан шар радиуса R. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B, C', если известно, что $\angle BAD = \alpha$.

Ответ: $\frac{4R^2\sqrt{2}}{\sin\alpha}$.

6. (МГУ, геологический ф-т). В прямой призме $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC' нижнее основание ABC является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой BC. Сфера S_1 с радиусом $(\sqrt{23}-\sqrt{2}-3)$ см касается боковых граней $AA'B'B$, $BB'C'C$ и нижнего основания ABC. Сфера S_2 с центром в точке C' касается сферы S_1 внешним образом. Известно, что $|AB| = |AA'|$ и что радиус сферы S_1 в два раза меньше радиуса сферы S_2. Найти объем призмы.

Ответ: $8(10-7\sqrt{2})$ см^3.

7. (МГУ, физический ф-т). В треугольной пирамиде $SABC$ высота SO проходит через точку O — центр круга, вписанного в основание ABC пирамиды. Известно, что $\angle SAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle SCA = \frac{\pi}{4}$, а отношение площади треугольника ABC к площади треугольника AOB равно $2-\sqrt{3}$. Найти угол BSC.

Ответ: $\frac{5\pi}{12}$.

8. (МГУ, экономический ф-т). $SABC$ — треугольная пирамида, в основании которой лежит треугольник ABC. Точки L, M и N расположены соответственно на ребрах AB, BC и CA так, что $|AL|:|LB|=|BM|:|MC|=|CN|:|NA|=2$. На отрезках SL, SM и SN помещены соответственно точки E, F и G так, что $|SE|:|EL|=|SF|:|FM|=|SG|:|GN|=2$. Точка K лежит на основании ABC пирамиды. Объем пирамиды $SABC$ равен V. Найти объем пирамиды $KEFG$.

Ответ: $\frac{4}{81}V$.

9. (МГУ, химический ф-т). Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. (МГУ, ВМК). В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра AC и BS и перпендикулярная к ним, проходит через середину ребра BS. Грань ASB равновелика грани BSC, а площадь грани ASC в два раза больше площади грани BSC. Внутри пирамиды есть точка M, сумма расстояний от которой до вершины B и S равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти расстояние от точки M до вершины B, если $|AC|=\sqrt{6}$, а $|BS|=1$.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{6}$.

11. (МГУ, механико-математический ф-т). В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $|CD|=a$, а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на CD, равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BCD. Найти объем пирамиды.

Ответ: $\frac{ab^2 \sin\alpha\cdot\cos\alpha}{3}$.

12. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части равного объема. В каком отношении находятся площади боковых поверхностей этих частей?

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

13. (МГУ, филологический ф-т). Дана пирамида $SABC$. Точка D лежит на ребре $[SA]$ и $|SD|:|DA|=\frac{1}{2}$. Точка E

лежит на ребре $[SB]$ и $|SE|:|EB|=\frac{1}{2}$. Через точки D и E проведена плоскость α, параллельная ребру $[SC]$. В каком отношении делит плоскость α объем пирамиды?

Ответ: 11:5.

14. (МГУ, геологический ф-т). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S через сторону BC основания проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Плоский угол при вершине пирамиды равен 60°. Высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$ см. Найти площадь сечения.

Ответ: $S=3\sqrt{2}$ см^2.

15. (МГУ, химический ф-т). Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что

$$\frac{|SK|}{|KA|}=\frac{|SL|}{|LB|}=2,$$

а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам.

Ответ: 8:37.

16. (МГУ, геологический ф-т). Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. Сторона основания равна 1 см, высота пирамиды равна $\sqrt{2}$ см. На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $|AK|:|KP|=1:3$, $|CM|=|PM|$. Найти отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проведенной через точки D, K и M.

Ответ: 3:4.

17. (МГУ, физический ф-т). Даны две треугольные пирамиды $SABC$ и $NKLM$, все ребра которых равны a. Эти пирамиды имеют общую высоту SN (S — центр грани KLM и N — центр грани ABC). Кроме того, $KL\parallel BC$ и пирамиды расположены так, что плоскость, проходящая через KL и BC, пересекает отрезок SN. Найти объем общей части пирамиды $SABC$ и $NKLM$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$.

18. (МГУ, механико-математический ф-т). Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

Ответ: 3.

19. (МГУ, экономический ф-т). В тетраэдр $ABCD$ вписан шар K. Из точки D на грань ABC тетраэдра $ABCD$ опущена высота DE. Точка P является серединой отрезка DE. Через точку P проведена плоскость M перпендикулярно к DE. Из всех точек, которые принадлежат одновременно шару K и плоскости M, взята точка O, являющаяся ближайшей к точке A. Найти расстояние точки O от грани ABD, если объем шара K равняется 1.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$.

20. (МГУ, химический ф-т). В правильной четырехугольной пирамиде расположен шар радиуса 2. Этот шар касается боковых граней пирамиды и внешним образом касается полушара, опирающегося на круг, вписанный в основание пирамиды. Точка касания шара и полушара отстоит от основания пирамиды на расстояние, равное одной трети высоты пирамиды. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

Ответ: $V=4(\sqrt{10}+1)^3$, $\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{11}{20}}$.

21. (МГУ, химический ф-т). В треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, треугольник ABC — основание пирамиды) грань SAC перпендикулярна грани ABC. Кроме того, $|SA|=|SC|=1$, а угол при вершине B треугольника ABC — прямой. Шар касается плоскости основания пирамиды в точке B, а грани SAC — в точке S. Найти радиус шара.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22. (МГУ, химический ф-т). На основании правильной треугольной пирамиды с высотой H и радиусом круга, вписанного в основание, равным r, лежит шар, касающийся основания в его центре. Найти радиус шара, если плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шара.

Ответ: $R=Hr/(r+\sqrt{r^2+4H^2})$.

23. (МГУ, геологический ф-т). Дан правильный тетраэдр $PABC$, длина ребра которого равна a см. Через точки C, E, M и P, где E — середина ребра AB, а M — середина ребра AC, проведена сфера. Найти радиус сферы.

Ответ: $\frac{a\sqrt{22}}{8}$ см.

24. (МГУ, геологический ф-т). В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Угол между боковым ребром пирамиды и стороной основания равен α. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ: $S=-4R^2\cdot\sin 4\alpha$.

25. (МГУ, геологический ф-т). Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна b, а угол между боковыми ребрами равен α.

Ответ: $\dfrac{b\sqrt{3}}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

26. (МГУ, ВМК). Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Ответ: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$.

27. (МГУ, механико-математический ф-т). Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b>a$). Сфера лежит над плоскостью основания ABC, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB. Найти радиус этой сферы.

Ответ: $\dfrac{a(2b-a)\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

28. (МГУ, механико-математический ф-т). В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60°. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 м. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB, и найти высоту пирамиды.

Ответ: $\sqrt{3}$ м.

29. (МГУ, механико-математический ф-т). В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $|DC|=9$, ребро $|DB|=|AD|$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найти объем пирамиды.

Ответ: 36.

30. (МГУ, механико-математический ф-т). В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар радиуса 2; высота пирамиды SK равна 6. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $|MN|=7$, касающаяся шара в точке, удален-

ной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.

Ответ: $6\frac{12}{13}$.

31. В прямой круговой конус с углом раствора 60° вложено три одинаковых шара радиуса r так, что каждый шар касается двух остальных, боковой поверхности конуса и плоскости основания. Найти радиус R основания конуса.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{3}r$.

32. (МГУ, геологический ф-т). В прямой круговой цилиндр с радиусом основания, равным 1 см, вписаны четыре одинаковых шара так, что они лежат на нижнем основании цилиндра, касаются его боковой поверхности, и каждый шар касается двух из трех других шаров. Площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$\frac{10\pi}{(1+\sqrt{2})} \text{ см}^2.$$

Найти объем прямого кругового конуса, основание которого совпадает с верхним основанием цилиндра и который касается всех четырех шаров.

Ответ: $\frac{5\pi}{8}$ см^3.

33. (МГУ, физический ф-т). Прямой круговой конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что

$$\angle PSR = \frac{\pi}{2},\ \angle SQR = \frac{\pi}{4},\ \angle PSQ = \frac{7\pi}{12}.$$

Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR пирамиды.

Ответ: $\frac{\pi(4\sqrt{3}-3)}{13}$.

34. (МГУ, химический ф-т). Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL,

$$\angle KLM = \angle LKN = \frac{\pi}{3},\ |KL| = a,\ |LM| = |KN| = 6a.$$

Плоскости KLM и KLN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков LM и KN в их серединах. Найти радиус шара.

Ответ: $\frac{a\sqrt{137}}{\sqrt{12}}$.

35. (МГУ, геологический ф-т). Три шара попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с

катетом, равным 3 см, и противолежащим углом в 30°. Определить радиусы данных шаров.

Ответ: $\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $0{,}75\sqrt{3}$.

36. (МГУ, физический ф-т). На сфере, радиус которой равен 2 м, расположены три окружности радиуса 1 м, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

Ответ: $1-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

37. (МГУ, ВМК). Точки A, B, C, D, E, F лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке S, находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как 1:9, пирамид $SABF$ и $SDEC$ — как 4:9, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ — как 9:4. Найти длины отрезков SA, SB, SC.

Ответ: 1, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

38. (МГУ, механико-математический ф-т). Шар радиуса r касается плоскости P в точке A. Прямая l образует с плоскостью P угол φ, пересекает эту плоскость в точке C и касается шара в точке B. Найти длину отрезка AB, если $|AC|=2r$.

Ответ: $2r\sqrt{\sin\varphi}$.

§ 10. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. (МГУ, географический ф-т). Упростить выражение

$$5^{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}}+\log_{\sqrt{2}}\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

Ответ: 6.

2. (МГУ, ф-т психологии). Вычислить без помощи таблиц

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96}2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12}2}.$$

Ответ: 3.

3. (МИИГАиК). Вычислить без таблиц

$$\sin^2 7^\circ 30'\cdot\sin 45^\circ-\cos 45^\circ\cdot\cos^2 52^\circ 30'.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

4. (МГУ, механико-математический ф-т). Разность

$$\sqrt{|24\sqrt{3}-43|}-\sqrt{24\sqrt{3}+43}$$

является целым числом. Найти это целое число.

Ответ: —8.

5. (МГУ, механико-математический ф-т). Разность

$$\sqrt{|20\sqrt{7}-53|}-\sqrt{20\sqrt{7}+53}$$

является целым числом. Найти это число.

Ответ: —10.

6. (МГУ, филологический ф-т). Найти все целые числа, удовлетворяющие неравенству:

$$\sqrt[6]{z+1}<\sqrt[8]{6-z}.$$

Ответ: {—1; 0; 1}.

7. (МГУ, филологический ф-т). Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2-1)(n^2-11)(n^2-1001)(n^2-101)<0.$$

Ответ: $\pm 2, \pm 3, \pm 11, \ldots, \pm 31$.

8. (МГУ, ф-т психологии). Найти все целые решения неравенства

$$x-1<\log_6(x+3).$$

Ответ: {—2; —1; 0; 1}.

9. (МГУ, филологический ф-т). Доказать, что если p и q — целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$p^2-4q^2=4pq,$$

то $p=q=0$.

10. (МГУ, ф-т психологии). Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2+2xy-x+y=112.$$

Ответ: (1; 37).

11. (МГУ, биологический ф-т). Найти все целые n, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\left(2\cos\frac{2\pi}{7}-n+8\right)}\left(\frac{\sqrt{n+5}-1}{\sqrt{10-n}}\right)\geqslant 0.$$

Ответ: {6; 7; 8}.

12. (МГУ, химический ф-т). Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x+1}}.$$

Ответ: $\left\{0;\ -\frac{\pi}{6}\right\}$.

13. (МГУ, экономический ф-т). Решить уравнение

$$1-\frac{2}{\pi}x-\cos x+\operatorname{tg}x+\frac{\cos 2x-1}{\sin 2x}=0.$$

Ответ: Решений нет.

14. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin^2 x}+2^{\cos 2x}=2^{\sin 2x}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\ \frac{\pi}{4}+\pi\cdot l \mid k, l\in\mathbf{Z}\right\}$.

15. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$2\cdot 3^{\operatorname{tg}^2 x}+1=3^{\frac{3-\cos 2x}{3+\cos 2x}}.$$

Ответ: $\{\pi\cdot n \mid n\in\mathbf{Z}\}$.

16. (МГУ, биологический ф-т). Решить уравнение

$$\log_{\sin 2x}(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=1-\log^2_{\sin 2x}2.$$

Ответ: $\left\{(-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\cdot n}{2}\,\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}$.

17. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все решения уравнения

$$2\log_5|\operatorname{ctg}x|-\log_{\frac{1}{5}}\frac{\sin x}{5\sin x-4\cos x}=0,$$

принадлежащие отрезку [3,3; 4].

Ответ: $\frac{5\pi}{4}$.

18. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить уравнение

$$3^{\frac{1}{2}+\log_3\cos x}+6^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}+\log_9\sin x}.$$

Ответ: $\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\cdot\pi \mid k\in\mathbf{Z}\right\}$.

19. (МИЭМ). Решить уравнение

$$f(x)=-f(-|x|),$$

где

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x+1}-3\operatorname{tg}x\right).$$

Ответ: $x \geqslant 0$, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\,(k \in \mathbf{Z})$ и $x = \pi \cdot l$ ($l = -1, -2, -3, \ldots$).

20. (МГУ, химический ф-т). Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 4$ и удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,75} \sin x \geqslant \log_{\frac{9}{16}} 0{,}75.$$

Ответ: $]0; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi[$.

21. (МГУ, ф-т психологии). Найти все x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\cos x^2}\left(\frac{3}{x} - 2x\right) < \log_{\cos x^2}(2x - 1).$$

Ответ: $]\frac{1}{2}; 1[$.

22. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\log_{\sin x - \cos x}(\sin x - 5\cos x) \geqslant 1.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi < x < \pi + 2k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

23. (МГУ, экономический ф-т). Решить неравенство

$$\cos^2(x+1) \cdot \lg(9 - 2x - x^2) \geqslant 1.$$

Ответ: $x = -1$.

24. (МГУ, химический ф-т). Решить неравенство

$$-\log_{\frac{1}{2}}(1 + \cos 3x) \leqslant 2 + \log_2\left(\frac{1}{4} - \cos x\right).$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k\right] \cup \left]\pi + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

25. (МГУ, механико-математический ф-т). Решить неравенство

$$\sqrt{2 + 2\log_2 \sin x - 2\log_2 \operatorname{tg} x} < 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k < x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$.

26. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих условию

$x>0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin[(x-\sqrt{\pi})^2+y^2]=0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}}=2. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{\pi};\ \sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi};\ -\sqrt{\pi})$, $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2};\ \frac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2};\ -\frac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$.

27. (МГУ, механико-математический ф-т). Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}(x-y)^2-(x-y)^4}=y^2-2x^2, \\ y\geqslant 4x^4+4yx^2+\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\ -\frac{3}{2}\right)$.

28. (МГУ, ВМК). Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

Ответ: {6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210}.

29. (МГУ, экономический ф-т). Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 13.

Ответ: 462462.

30. (МГУ, физический ф-т). Доказать тождество

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1}).$$

31. (МГУ, ф-т психологии). Найти все положительные числа a, для которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\cos[(5a-9)x]=\cos[(9a+17)x]$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: $\left\{\frac{1}{19};\ \frac{5}{12};\ \frac{9}{5};\ \frac{22}{3};\ 35\right\}$.

32. (МГУ, физический ф-т). Сумма трех положительных чисел α, β и γ равна $\frac{\pi}{2}$. Вычислить произведение $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\gamma$ образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: 3.

33. (МГУ, биологический ф-т). Даны две арифметические прогрессии: a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$, а числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1=b_3$, $a_2=b_2$, $a_3=b_1$.

34. (МГУ, биологический ф-т). Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 снова образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 \cdot b_3 = a_3 \cdot b_1$.

35. (МГУ, физический ф-т). Три последовательных члена геометрической прогрессии a_1, a_2 и a_3 являются соответственно первым, четвертым и двадцать пятым членами арифметической прогрессии. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 равна 114. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: $q=1$; $q=7$.

36. (МГУ, механико-математический ф-т). Даны арифметическая и геометрическая прогрессии с положительными членами. Первые и вторые члены этих прогрессий соответственно совпадают. Доказать, что всякий другой член арифметической прогрессии не больше соответствующего члена геометрической прогрессии.

37. (МГУ, ф-т психологии). Найти все действительные числа x такие, что числа

$$0,\ \log_3(2\sin x),\ \log_3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)$$

в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 2k\cdot\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

38. (МГУ, химический ф-т). Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов чисел a_1, a_3, a_5 по основанию 3 равна 9. Определить числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, если $\log_3 a_4$ вдвое больше $\log_3 a_2$.

Ответ: 3, 9, 27, 81, 243.

39. (МГУ, ф-т психологии). Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами двух арифметических прогрессий 5, 9, 13, ... и 3, 9, 15, ..., если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

Ответ: 27135.

40. (МГУ, ф-т психологии). Найти числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии 12, 15, 18, ... и геометрической прогрессии 1, 3, 9, ..., если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 100 членов.

Ответ: 27, 81, 243.

41. (МГУ, механико-математический ф-т). Три отличных от нуля действительных числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, составляют геометрическую прогрессию. Найти все возможные значения знаменателя этой последней прогрессии.

Ответ: $\{3-2\sqrt{2};\ 1;\ 3+2\sqrt{2}\}$.

42. (Куйбышевский гос. университет). Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}$$

имеет предел.

43. (КГУ). Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

44. (ЛГУ). Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

45. (МИСиС). Найти предел последовательности

$$x_n = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Ответ: $\frac{1}{72}$.

46. (МАДИ). Вычислить

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}.$$

Ответ: -1.

47. (МИХМ). Найти

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

48. (Ярославский гос. университет). Найти

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}.$$

Ответ: 0.

49. (МАДИ). Вычислить

$$\lim_{x\to 2} \frac{2+x-x^2}{x^2-4}.$$

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

50. (БГУ). Вычислите предел

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$$

Ответ. $\frac{1}{4}$.

51. (МИНХ). Вычислить

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

52. (МИХМ). Найти предел выражения

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}.$$

Ответ: $\frac{1}{16}$.

53. (МИНХ). Вычислить

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

54. (МЭИ). Вычислить

$$\lim_{x\to 0}(((1+x^2)\sqrt{x^{-2}+1})^{\frac{1}{3}}-((1-x^2)\sqrt{x^{-2}-1})^{\frac{1}{3}})^3\times$$

$$\times(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})^3.$$

Ответ: 0.

55. (СПИ). Предварительно упростив выражение

$$\left(\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}-4}-\frac{2^3\sqrt{x^2}-4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}\right)^{-1}\cdot(x-2\sqrt[3]{x^2}),$$

найти предел при $x \to 8$.

Ответ: 4.

56. (МЭИ). Упростив выражение

$$\left(\frac{(x^3-4)^{-2}+(x+2)^{-2}-(x-2)^{-2}}{1-8x}\right)^{-1}-(4\sqrt[3]{4})^{\log_4 x^3}-16,$$

найти его предел при $x \to \frac{1}{8}$.

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

57. (МЭИ). Упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x\to a}\left\{\left[\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}}\right)^{-1}-\frac{2\sqrt[4]{ax}}{x^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{3}{4}}}\right]^{-1}-\sqrt{2^{\log_4 a}}\right\}^8.$$

Ответ: a^2.

58. (МИСиС). Построить график функции f, где

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\ x>0.$$

59. (МАДИ). Вычислить

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin x}.$$

Ответ: 0.

60. (СПИ). Предварительно упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

61. (МИНХ). Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x\to\sin x}.$$

Ответ: -2.

62. (БГУ). Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin x-\operatorname{tg} x}{x^2\cdot\sin x}.$$

Ответ: -1.

63. (МИСиС). Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Ответ: —24.

64. (МИСиС). Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

65. (ЛГУ). При каких a ($a\in R$) точка $(a;\ a^2)$ расположена внутри треугольника, ограниченного прямыми $y=x+1$, $y=3-x$, $y=-2x$?

Ответ: $\left]-\frac{1+\sqrt{13}}{2};\ -2\right[$.

66. (Киевский политехнический ин-т). Около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого треугольника равна $2a^2$.

67. (МФТИ). Графики функций $y=\frac{1}{2x}$ и $y=\frac{17}{3}-2x$, рассматриваемые в первой координатной четверти ($x>0$; $y>0$), пересекаются в точках A и B. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника перпендикулярна оси Ox, две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB. Найти длины сторон треугольника.

Ответ: $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$.

68. (МФТИ). На координатной плоскости расположен квадрат $ABCD$. Вершины A и B квадрата лежат на графике функции $y=x^2$, и вершины C и D — на графике функции $y=x-4$. Определить длину стороны квадрата.

Ответ: $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$.

69. (МИЭМ). Найти площадь треугольника ABC, если заданы координаты его вершин: A (3; —1), B (1; —3), C (—6; 6). Указать все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

Ответ: Площадь равна 16. Искомых перемещений два: тождественное отображение и осевая симметрия с осью — высотой на AB.

70. (МИЭМ). На координатной плоскости заданы точки A (1; 0), B (0; 1) и C (5; 5). Вычислить площадь тре-

угольника ABC и указать все перемещения плоскости, при которых он переходит в себя.

Ответ: $S=\frac{9}{2}$. Искомых перемещений два: тождественное отображение и осевая симметрия S_l, где $C\in l$ и $l\perp(AB)$.

71. (МИЭМ). На плоскости заданы точки A (—6; 3), B (—7; 7), C (—3; 6) и D (—2; 2). Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — ромб, и вычислить его площадь. Указать все перемещения плоскости, при которых ромб $ABCD$ отображается на себя.

Ответ: Площадь равна 15. Искомых перемещений четыре — тождественное отображение, две осевые симметрии и центральная симметрия.

72. (МИЭМ). Даны две вершины равностороннего треугольника A (2; 0) и B (0; 2). Найти его площадь и координаты третьей вершины C. Указать все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

Ответ: $S=2\sqrt{3}$, $C=(1+\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$ или $C=(1-\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3})$.

Тождественное отображение, три осевые симметрии с осями — высотами треугольника, два поворота вокруг центра треугольника на 60° и на —60°.

73. (МИЭМ). При повороте координатной плоскости на угол α с центром в точке M точка A (2; 3) переходит в $A_1(5;\ 2)$, а B (2; 5) в $B_1(7;\ 2)$. Найти образ точки C (2; 4). Найти образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найти величину угла α и координаты точки M.

Ответ: $M(3;\ 1)$, $\alpha=-90$, $C_1(6;\ 2)$, образ точки M совпадает с M.

74. (МИЭМ). Найти образ точки A (2; 7) при повороте координатной плоскости вокруг точки M (2; 3) на угол $-\frac{\pi}{2}$. Найти образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найти образ точки C (—4; 8) при этом повороте.

Ответ: $A'=(6;\ 3)$, $M'=M$, $C'=(7;\ 9)$.

75. (ЛКИ). Найти координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек A (1; 2; 3) и B (—3; 3; 2).

Ответ: M (—1; 0; 0).

76. (МГПИ). Доказать, что точки A (1; —1; 1), B (1; 3; 1), C (4; 3; 1), D (4; —1; 1) являются вершинами прямоугольника. Вычислить длину его диагоналей и координаты их точки пересечения.

Ответ: $|AC|=|BD|=5$, $[AC]\cap[BD]=\left(\frac{5}{2};\ 1;\ 1\right)$.

77. (МГПИ). Доказать, что точки A (2; 4; —4), B (1; 1; —3), C (—2; 0; 5), D (—1; 3; 4) являются вершинами парал-

лелограмма, и вычислить величину угла между его диагоналями.

Ответ: $\arccos \frac{63}{\sqrt{6441}}$.

78. (МИСиС). В треугольнике ABC A (—1; 2; 3) — вершина прямого угла. Найти координаты вершин B и C, если известно, что B и C лежат на прямой (MN), где M (—1; 3; 2), N (1; 1; 3) и $\widehat{ABC}=30^\circ$.

Ответ: $B\left(-\frac{17+2\sqrt{307}}{27}; \frac{71+2\sqrt{307}}{27}; \frac{59-\sqrt{307}}{27}\right)$, $C\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$

или

$B\left(\frac{-17+2\sqrt{307}}{27}; \frac{71-2\sqrt{307}}{27}; \frac{59+\sqrt{307}}{27}\right)$, $C(-1; 3; 2)$.

79. (МИСиС). Точки A (1; 2; 3), B (1; 5; 3), C (3; 3; 3) лежат на окружности нижнего основания цилиндра. а точка D (2; 3; 7) — на его верхнем основании. Найти координаты центров оснований и объем цилиндра.

Ответ: $O\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$, $O_1\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 7\right)$, $V=10\pi$.

80. (МИСиС). Найти угол между плоскостью, проходящей через точки A (0; 0; 0), B (1; 1; 1), C (3; 2; 1), и плоскостью, проходящей через точки A (0; 0; 0), B (1; 1; 1), D (3; 1; 2).

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

81. (Киевский политехнический ин-т). В плоскости прямоугольника $ABCD$ дана точка M. Докажите, что $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$.

82. (МГУ, экономический ф-т). В четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине A имеет величину 120°, а диагональ AC является биссектрисой этого угла. Известно, что

$$|AC|=\frac{|AB|}{5}=\frac{|AD|}{3}.$$

Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

83. (МГУ, экономический ф-т). В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке F. Известно, что $|AF|=|CF|=2$, $|BF|=1$, $|DF|=4$, $\widehat{BFC}=60^\circ$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

Ответ: $\frac{13}{14}$.

84. (ЛГПИ). Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Ответ: $\arccos\frac{4}{5}$.

85. В треугольнике ABC проведена биссектриса CC_1. Доказать, что

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{|CB|\cdot\overrightarrow{CA}+|AC|\overrightarrow{CB}}{|CA|+|CB|}.$$

86. В треугольнике ABC H — точка пересечения высот. Доказать, что

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}.$$

87. (Казанский гос. университет). Найти координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q}=(3;\ -4)$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует с осью Ox тупой угол и $|\vec{p}|=10$.

Ответ: $\vec{p}=(-6;\ 8)$.

88. В треугольнике ABC ($|AB|=|BC|=15$) точка E делит сторону BC в отношении $1:4$ (считая от вершины B). Найти угол между векторами AE и AC, если

$$|AC|=20.$$

89. Дан квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $|OB|=10$, $|OD|=6$. Найти угол между вектором $\overrightarrow{OB}$ и вектором, направленным из точки O в наиболее удаленную от нее вершину квадрата.

90. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60°$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

91. (МИСИ). Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с каждым из них угол в 60°. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, вычислить скалярное произведение $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$.

Ответ: -62.

92. (МГПИ). Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные и взаимно пер-

пендикулярные. Найти угол между суммой и разностью векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, где $\vec{p} = 8\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{q} = 4\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: $\arccos \frac{63}{65}$.

93. (МИЭТ). Даны три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если вектор $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

Ответ: $\vec{O}$.

94. (МИИГАиК). Даны четыре точки A (—2; — 3; 8), B (2; 1; 7), C (1; 4; 5) и D (—7; —4; 7). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

95. (МИИГАиК). При каком значении z векторы $\vec{a}=(2; -3; 4)$ и $\vec{b}=(-3; 2; z)$ перпендикулярны.

Ответ: $z=3$.

96. (МИИГАиК). При каком значении z векторы $\vec{a}=(2; -3; 4)$ и $\vec{b}=(-3; 2; z)$ перпендикулярны.

Ответ: $z=4$.

97. (МИИГАиК). Вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}=(6; 8; -7{,}5)$ и образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\vec{b}|=50$, найти его координаты.

Ответ: (—24; —32; 30).

98. (МИХМ). Векторы $\overrightarrow{AB}=(3; -2; 2)$ и $\overrightarrow{BC}=(-1; 0; -2)$ являются смежными сторонами параллелограмма. Определить величину угла между его диагоналями $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Ответ: $\frac{3}{4}\pi$.

99. (Казанский авиационный ин-т). Векторы $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+4\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

Ответ: $|AM|=\sqrt{18}$.

100. (МГПИ). Найти косинусы углов, которые образует с базисными векторами вектор $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

Ответ: $\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$.

101. (МИХМ). При каких α и β вектор $\vec{a}=(3; -1; \alpha)$ ортогонален вектору $\vec{b}=(2; \beta; 1)$, если $|\vec{b}|=3$?

Ответ: $\alpha_1=-4$, $\beta_1=2$ и $\alpha_2=-8$, $\beta_2=-2$.

102. (МАИ). Вычислить координаты вектора $\vec{c}$, перпендикулярного векторам $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и образующего тупой угол с осью Oy, если $|\vec{c}|=\sqrt{7}$.

Ответ: $\vec{c}=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

103. (ЛГУ). Вектор $\vec{a}$, у которого первая координата больше второй, перпендикулярен вектору $\vec{b}=(1; -3; -1)$ и образует с осью Oz угол, равный 135°. Найти его координаты, если известно, что $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$.

Ответ: (4; 3; —5).

104. (ЛГУ). Вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b}=(12; -16; -15)$, образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\vec{a}|=100$, найти его координаты.

Ответ: (—48; 64; 60).

105. (ЛГУ). Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(1; 1; 1)$ и $\vec{b}=(1; -1; 3)$, образует с осью Oz тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $|\vec{c}|=3$.

Ответ: $\left(\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

106. (МИСиС). Все ребра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a, плоские углы при вершине A равны α. Найти величину угла между (BC_1) и (AC) и полную поверхность призмы.

Ответ: $\cos(\widehat{\vec{BC_1}, \vec{AC}})=\frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$;

$$S=a^2(1+3\sin^2\alpha).$$

107. (ЛГУ). Найти вектор $\vec{a}=(x; y; z)$, образующий равные углы с векторами $\vec{b}=(y; -2z; 3x)$, $\vec{c}=(2z; 3x; -y)$, если $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{d}=(1; -1; 2)$, $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\vec{a}$ и осью Oy — тупой.

Ответ: $\vec{a}=(2; -2; -2)$.

108. (МИЭТ). Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.

Ответ: $\vec{c_1} = (1; 0; 1)$, $\vec{c_2} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

109. (МИСиС). В пространстве даны три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, образующие одинаковые углы между собой, равные $\frac{\pi}{3}$. Объем пирамиды $ABCD$ равен 10. Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если

$$|AB| : |AC| : |AD| = 1 : 2 : 3.$$

Ответ: $\sqrt[6]{200}$; $2\sqrt[6]{200}$; $3\sqrt[6]{200}$.

110. (МАИ). Треугольная пирамида задана координатами своих вершин $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$, $D(0; -5; 4)$. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AO}$, если O — точка пересечения медиан грани BCD.

Ответ: $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

ГЛАВА III

ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В МГУ

§ 1. МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Вариант I

1. Найти все значения x, удовлетворяющие условию

$$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin 2x=\sqrt{3}\sin x.$$

3. В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50°. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 1.

4. Касательная к графику функции $\sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=2$, будет наименьшей и чему равна эта наименьшая площадь?

5. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$$

имеет ровно одно решение.

Вариант II

1. Найти все значения x, удовлетворяющие условию

$$(9-x^2)\sqrt{2-x}=0.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin x=\sqrt{5}\cos\frac{x}{2}.$$

3. Окружность радиуса 3, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC и касается стороны BC в точке E. Найти $|ED|$, если величина угла BCA равна $\frac{2}{3}\pi$.

4. Касательная к графику функции $1/x^2$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $[5, 9]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и вертикальной прямой $x=4$, будет наибольшей и чему равна эта наибольшая площадь?

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|}\cdot\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}\cdot\log_{\frac{1}{3}}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три решения.

Разбор задач варианта I

Задача 1. Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2-4=0; \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x+1}=0, \\ x+1\geqslant 0. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $x=2$, а из второй $x=-1$.

Ответ: $\{-1; 2\}$.

Задача 2. Воспользуемся формулой $\sin 2x=2\sin x\cos x$, получаем

$$\sin 2x=\sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0, \\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Решая первое уравнение совокупности, получаем

$$x=\pi n,\ n\in Z.$$

Решая второе уравнение совокупности, получаем

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $\left\{\pi n,\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k\,|\,n, k\in Z\right\}$.

Задача 3. Пусть в трапеции $ABCD$ KM — средняя линия, $|KM|=4$, а LN — отрезок, соединяющий середины оснований AD и BC (точка N лежит на AD), $|LN|=1$. Пусть

$\widehat{BAD}=50°$, а $\widehat{CDA}=40°$. Отметим, что $|AD|>|BC|$, поскольку $\widehat{BAD}+\widehat{CDA}=90°<180°$ (рис. 31). Обозначим точку пересечения прямых AB и DC через Q. Поскольку $BC\|AD$, треугольник AQD подобен треугольнику BQC, поэтому

$$\frac{|BQ|}{|AQ|}=\frac{|BC|}{|AD|}=\frac{|BC|/2}{|AD|/2}=\frac{|BL|}{|AN|}.$$

Так как $\widehat{QBC}=\widehat{QAD}$ и $\frac{|BQ|}{|AQ|}=\frac{|BL|}{|AN|}$, то треугольники QBL и QAN подобны. Поэтому $\widehat{BQL}=\widehat{AQN}$, и, следовательно, точки Q, L, N лежат на одной прямой. В треугольнике AQD $\widehat{AQD}=180°-\widehat{QAD}-\widehat{QDA}=90°$ и $|QN|=|AD|/2$ по

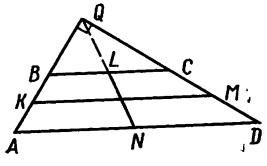


Рис. 31

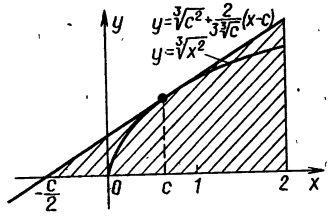


Рис. 32

свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе. Аналогично $|QL|=|BC|/2$. Итак, $|AD|/2-|BC|/2=|QN|-|QL|=|LN|=1$. По свойству средней линии трапеции

$$\frac{|AD|+|BC|}{2}=|KM|=4.$$

Имеем систему

$$\begin{cases}|AD|-|BC|=2,\\ |AD|+|BC|=8,\end{cases}$$

из которой получаем $|AD|=5$, $|BC|=3$.

Ответ: Длины оснований равны 3 и 5.

Задача 4. Иллюстрация к этой задаче приведена на рис. 32. Уравнение касательной к графику функции $y(x)=\sqrt[3]{x^2}$ в точке с абсциссой c имеет вид $y=\sqrt[3]{c^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}(x-c)$, так как производная функции $y(x)$ при $x>0$ равна $y'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Точка пересечения касательной с

осью абсцисс легко находится, если положить в уравнение касательной $y=0$. Получим $x=-\frac{c}{2}$. Площадь треугольника, ограниченного касательной, осью Ox и прямой $x=2$, найдем по формуле Ньютона — Лейбница:

$$S(c)=\int\limits_{-\frac{c}{2}}^{2}\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}(x-c)+\sqrt[3]{c^2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{(x-c)^2}{3\sqrt[3]{c}}+\sqrt[3]{c^2}\,x\right]\Bigg|_{-\frac{c}{2}}^{2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{(c+4)^2}{\sqrt[3]{c}}.$$

Функция $S(c)$ определена и дифференцируема при $c>0$:

$$S'(c)=\frac{1}{36}c^{-\frac{4}{3}}(c+4)(5c-4).$$

На промежутке $]0;\ +\infty[$ функция $S(c)$ имеет только одну критическую точку

$$c=\frac{4}{5}\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right],\ \text{причем}\ S'(c)<0\ \text{при}\ 0<c<\frac{4}{5}$$

(функция убывает) и $S'(c)>0$ при $\frac{4}{5}<c$ (функция возрастает). Поэтому точка $c=\frac{4}{5}$ является точкой, в которой функция $S(c)$ принимает наименьшее значение $S\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\times$ $\times\frac{48}{25}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$.

Ответ: При $c=\frac{4}{5}$ площадь треугольника будет наименьшей и она равна $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\cdot\frac{48}{25}$.

Задача 5. Левая часть данного неравенства не определена при $a<0$ и $a=1$. Рассмотрим случай $a>1$. Перейдя в первом логарифме к основанию 3 и умножая обе части неравенства на $\log_3\frac{1}{a}<0$, получим неравенство, равносильное исходному

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\leqslant 1.$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$\log_a 3 \cdot \log_3 \frac{1}{a} = -1.$$

Пусть $u = x^2 + ax + 5$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$\log_3(\sqrt{u}+1) \cdot \log_5(u+1) \leqslant 1.$$

Функция $f(u) = \log_3(\sqrt{u}+1) \cdot \log_5(u+1)$ определена при $u \geqslant 0$ и монотонно возрастает (это видно непосредственно из определения монотонно возрастающей функции). Заметим, что $f(4) = 1$. Следовательно, $f(u) \leqslant 1$ при $0 \leqslant u \leqslant 4$, и поэтому исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$0 \leqslant x^2 + ax + 5 \leqslant 4.$$

Опуская подробные выкладки, имеем, что решение этой системы неравенств запишется в виде

$$1) \left[\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}; \frac{-a-\sqrt{a^2-20}}{2}\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{-a+\sqrt{a^2-20}}{2}; \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right], \text{ если } a^2 - 20 \geqslant 0;$$

$$2) \left[\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}; \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right], \text{ если } \begin{cases} a^2 - 4 \geqslant 0, \\ a^2 - 20 < 0; \end{cases}$$

3) Решений нет, если $a^2 - 4 < 0$.

Нетрудно видеть, что система имеет ровно одно решение, если $a^2 - 4 = 0$. Учитывая, что $a > 1$, получаем $a = 2$. Если $0 < a < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_3(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \cdot \log_5(x^2 + ax + 6) \geqslant 1.$$

Совершенно аналогично устанавливаем, что последнее неравенство равносильно неравенству

$$x^2 + ax + 5 \geqslant 4,$$

которое при любом a имеет бесконечно много решений, и поэтому никакие a из рассматриваемого промежутка условию задачи не удовлетворяют.

Ответ: $a = 2$.

§ 2. ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Вариант I

1. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

2. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Найти площадь треугольника ABC.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$$

имеет два действительных корня?

5. Две точки движутся с постоянными скоростями по окружностям, которые лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Направление движения одной точки — по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки. В момент начала движения обе точки и центр окружностей лежат на одной прямой, а расстояние между точками $\frac{16}{7}$ см. После старта расстояние между точками сначала уменьшалось, а через 11 с составляло $\frac{\sqrt{207}}{7}$ см. Кроме того, с интервалом в 11 с было зафиксировано два момента, когда расстояние равнялось $\frac{\sqrt{158}}{7}$ см, а в промежутке между этими моментами расстояние ни разу не принимало значения $\frac{\sqrt{158}}{7}$ см. Найти минимальное расстояние между точками.

6. В пирамиде $SABC$ суммы длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина тупого угла между ребрами SB и AC равна $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, радиус вписанной в пирамиду сферы равен

$$\sqrt{\frac{3}{13}} \text{ и } |SA|^2 + |SC|^2 = 12.$$

Найти объем пирамиды $SABC$, если известно, что он не превосходит $\frac{5}{3}$.

Вариант II

1. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

2. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{2} \cdot \sin x = 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины A прямого угла опущена высота AH на гипотенузу BC. Известно, что $|AC|=5$, $|HC|=3$. Найти площадь треугольника ABC.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$$

имеет не более одного действительного корня?

5. Две точки движутся с постоянными скоростями по окружностям, которые лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Направление движения одной точки — по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки. В начальной момент отрезки, соединяющие точки с центром окружностей, взаимно перпендикулярны, а расстояние между точками равно $\sqrt{10}$ м. После старта расстояние между точками сначала увеличивалось, а через 8 мин составило $\frac{\sqrt{250+27\sqrt{19}}}{5}$ м. Кроме того, с интервалом 8 мин было зафиксировано два момента, когда расстояние равнялось $\sqrt{\frac{77}{5}}$ м, а в промежутке между этими моментами расстояние ни разу не принимало значение $\sqrt{\frac{77}{5}}$ м. Найти длину большей окружности.

6. В пирамиде $SABC$ произведения длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина угла между ребром SA и гранью ABC равна $\arcsin\frac{4}{\sqrt{21}}$, а расстояние между ребрами SC и AB равно 1. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что она не меньше 4, а

$$3|SA|^2+|SC|^2=3|SB|^2.$$

Разбор задач варианта I

Задача 1. Подставляя $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ в формулу $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, получаем $\cos 2\alpha=\frac{7}{9}$.

Ответ: $\cos 2\alpha=\frac{7}{9}$.

Задача 2. Воспользуемся формулой $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$, получаем:

$$\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cdot\cos x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$$

Решая первое из этих уравнений, получаем

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Решая второе из этих уравнений, получаем

$$x_2=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi,\ k,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Задача 3. Заметим, что поскольку у прямоугольных треугольников ABC и ABD есть общий острый угол A

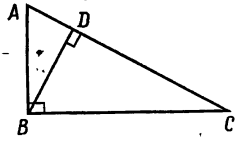


Рис. 33

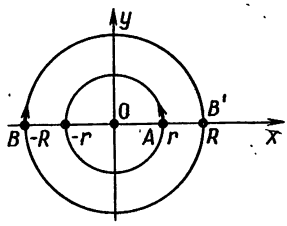


Рис. 34

(рис. 33), то эти треугольники подобны. Далее, так как у подобных треугольников площади относятся как квадраты длин сходственных сторон, т. е. как квадрат коэффициента подобия, то $\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=\frac{|AB|^2}{|AD|^2}$ или, что то же самое, $S_{ABC}=$ $=\left(\frac{|AB|}{|AD|}\right)^2\cdot S_{ABD}$.

В свою очередь, из $\triangle ABD$ по теореме Пифагора получаем:

$$|AD|=\sqrt{|AB|^2-|BD|^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5;$$

и, кроме того,

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30.$$

Окончательно получаем

$$S_{ABC}=\left(\frac{13}{5}\right)^2\cdot 30=202{,}8.$$

Ответ: $S_{ABC}=202{,}8$.

Задача 4. Если $3a-1=0$, то уравнение становится линейным и не может иметь двух корней. С другой стороны, мы знаем, что квадратное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен. Таким образом, необходимым и достаточным условием существования двух различных корней уравнения $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ является выполнение условий:

$$(S)\begin{cases} 3a-1\neq 0, & (1)\\ D=4a^2-4(3a-1)(3a-2)>0. & (2)\end{cases}$$

Решим неравенство (2):

$$(2)\Leftrightarrow 8a^2-9a+2<0\Leftrightarrow \frac{9-\sqrt{17}}{16}<a<\frac{9+\sqrt{17}}{16}.$$

Условие (1) означает, что $a\neq\frac{1}{3}$. Выясним, лежит ли $\frac{1}{3}$ в интервале $\left]\frac{9-\sqrt{17}}{16},\ \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right[$. Это можно сделать, например, сравнив $\frac{1}{3}$ с числами $\frac{9\pm\sqrt{17}}{16}$; однако гораздо проще проверить, будет ли квадратный трехчлен $8a^2-9a+2$ отрицателен при $a=\frac{1}{3}$:

$$8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-9\cdot\frac{1}{3}+2=\frac{8}{9}-\frac{27}{9}+\frac{18}{9}=-\frac{1}{9}<0,$$

т. е. $\frac{1}{3}\in\left]\frac{9-\sqrt{17}}{16},\ \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right[$. Таким образом, условия (S) выполняются для всех $a\in\left]\frac{9-\sqrt{17}}{16},\ \frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3},\ \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right[$.

Ответ: $a\in\left]\frac{9-\sqrt{17}}{16},\ \frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3},\ \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right[$.

Задача 5. Пусть O — центр обеих окружностей, r — радиус меньшей окружности и R — радиус большей окружности и пусть ω_1 — угловая скорость точки A, движущейся по меньшей окружности против часовой стрелки, а ω_2 — угловая скорость точки B, движущейся по большей окружности. В начальный момент $t=0$ обе точки лежат на прямой l, проходящей через центр O. Рассмотрим декартову систему координат на плоскости, причем пусть начало координат совпадает с O и ось Ox совпадает с прямой l так, что точка A в начальном положении имеет координаты $(r, 0)$ (рис. 34). В таком случае точка B имеет координаты либо $(-R, 0)$,

либо $(R, 0)$. Если бы точка B имела координаты $(R, 0)$ в начальном положении, то после старта расстояние между точками начало бы возрастать, так как в начальном положении было бы минимальным. Следовательно, в начальном положении точка B имеет координаты $(-R, 0)$. По условию задачи имеем

$$r + R = \frac{16}{7}. \tag{1}$$

Координаты точки A меняются со временем по закону

$$\begin{cases} x_A(t) = r \cdot \cos \omega_1 t, \\ y_A(t) = r \cdot \sin \omega_1 t; \end{cases} \tag{2}$$

координаты точки B меняются по закону

$$\begin{cases} x_B(t) = R \cos(-\omega_2 t + \pi) = -R \cos \omega_2 t, \\ y_B(t) = R \sin(-\omega_2 t + \pi) = R \sin \omega_2 t. \end{cases} \tag{3}$$

Квадрат расстояния между точками A и B равен в момент t

$$\begin{aligned} d_{AB}^2(t) &= (-R \cos \omega_2 t - r \cos \omega_1 t)^2 + (R \sin \omega_2 t - r \sin \omega_1 t)^2 = \\ &= R^2 + r^2 + 2Rr(\cos \omega_2 t \cos \omega_1 t - \sin \omega_2 t \sin \omega_1 t) = \\ &= R^2 + r^2 + 2Rr \cos((\omega_2 + \omega_1) t). \end{aligned} \tag{4}$$

Заменив в (4) сумму $\omega_2 + \omega_1$ на ω, получим

$$d_{AB}^2(t) = R^2 + r^2 + 2Rr \cos \omega t. \tag{5}$$

По условию задачи имеем

$$R^2 + r^2 + 2Rr \cdot \cos 11\omega = \frac{207}{49}, \tag{6}$$

$$R^2 + r^2 + 2Rr \cdot \cos \omega t_0 = \frac{158}{49}, \tag{7}$$

$$R^2 + r^2 + 2Rr \cdot \cos(\omega(t_0 + 11)) = \frac{158}{49} \tag{8}$$

и

$$R^2 + r^2 + 2Rr \cdot \cos \omega t \neq \frac{158}{49} \text{ при } t \in]t_0,\ t_0 + 11[. \tag{9}$$

Очевидно, что наименьшее значение расстояния и, следовательно, квадрата расстояния, будет достигаться, когда $\cos \omega t$ будет принимать значение -1. При этом оно будет равно $R - r$. Таким образом, требуется найти эту разность.

Из уравнений (7)—(8) получаем уравнение $\cos \omega t_0 = \cos(\omega t_0 + 11\omega)$, решения которого:

$$\omega t_0 = \pm(\omega t_0 + 11\omega) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

т. е.

$$\begin{cases} 11\omega = -2k\pi, & (10) \\ 11\omega = -2\omega t_0 + 2k\pi. & (11) \end{cases}$$

Подставляя 11ω из уравнения (10) в уравнение (6), получим

$$\frac{207}{49} = R^2 + r^2 + 2Rr\cdot\cos(-2k\pi) = R^2 + r^2 + 2Rr = (R+r)^2,$$

что противоречит условию (1). Таким образом, остается только условие (11). Для того чтобы исключить из уравнений $\cos(\omega t_0)$, возведем обе части уравнения (1) в квадрат:

$$R^2 + r^2 + 2Rr = \frac{256}{49}. \quad (12)$$

Вычитая из уравнения (12) уравнение (6), получаем

$$2Rr(1-\cos 11\omega) = 1. \quad (13)$$

Аналогично, вычитая из уравнения (6) уравнение (7), получаем

$$2Rr(\cos 11\omega - \cos\omega t_0) = 1. \quad (14)$$

Из уравнений (13)—(14) получаем уравнение

$$1-\cos 11\omega = \cos 11\omega - \cos\omega t_0. \quad (15)$$

Подставляя вместо 11ω его выражение из уравнения (11), имеем

$$1 - \cos(2\omega t_0) = \cos(2\omega t_0) - \cos(\omega t_0),$$

т. е. квадратное уравнение относительно $\cos(\omega t_0)$:

$$4\cos^2(\omega t_0) - \cos(\omega t_0) - 3 = 0, \quad (16)$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \cos\omega t_0 = 1, & (17) \\ \cos\omega t_0 = -\frac{3}{4}. & (18) \end{cases}$$

Если $\cos\omega t_0 = 1$, то, подставив это условие в уравнение (7), получим противоречие с условием (12); поэтому выполнено условие (18). Подставляя $\cos\omega t_0$ из (18) в (7), получаем

$$R^2 + r^2 - \frac{3}{2}Rr = \frac{158}{49}.$$

Вычитая из уравнения (12) полученное уравнение, имеем

$$2Rr = \frac{8}{7} \quad (19)$$

и, значит,

$$R^2 + r^2 = \frac{1200}{49}. \qquad (20)$$

Вычитая из уравнения (20) уравнение (19), получаем

$$R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2 = \frac{1441}{49}, \text{ т. е. } R - r = \frac{12}{7}.$$

Итак, мы получили, что минимальное расстояние равно $\frac{12}{7}$ см. Однако при решении мы нигде не использовали условие (9), поэтому необходимо показать, что оно не противоречит остальным условиям задачи. Для этого достаточно

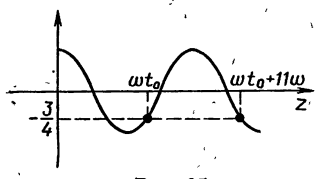


Рис. 35

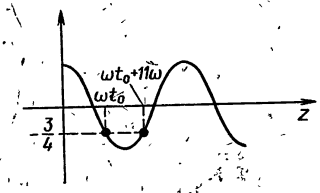


Рис. 36

указать такую частоту ω, при которой выполнено условие (9). Заметим, что на промежутке $]\omega t_0, \omega t_0 + 11\omega[$ функция $\cos z$ должна быть либо больше значения $-\frac{3}{4}$, либо меньше этого значения. В первом случае это означает (рис. 35), что значения ωt_0 и $\omega t_0 + 11\omega$ совпадают с концами интервала, на котором $\cos z > -\frac{3}{4}$, т. е.

$$\begin{cases} \omega t_0 = -\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi \cdot n, \\ \omega t_0 + 11\omega = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi \cdot n, \end{cases}$$

откуда $11\omega = 2\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$, т. е. $\omega = \frac{2\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)}{11}$.

Во втором случае (рис. 36) эти значения — концы интервала, на котором $\cos z < -\frac{3}{4}$, т. е.

$$\begin{cases} \omega t_0 = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi \cdot n, \\ \omega t_0 + 11\omega = 2\pi - \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi \cdot n, \end{cases}$$

откуда $11\omega = 2\pi - 2\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ т. е.

$$\omega = \frac{2\pi - 2\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)}{11}.$$

Таким образом, при любой из этих двух указанных частот условие (9) будет выполнено.

Ответ: Минимальное расстояние равно $\frac{12}{7}$ см.

Задача 6. Обозначим $|AC|=x$, $|BC|=y$, $|AB|=z$, $|SA|=u$, $|SB|=v$, $|SC|=w$ (рис. 37), тогда первое из условий задачи записывается системой уравнений:

$$\begin{cases} u+v+w=v+y+z, & (1) \\ z+u+x=w+y+x, & (2) \\ u+v+w=z+u+x. & (3) \end{cases}$$

Сложив уравнение (1) с уравнением (2), получим после сокращения подобных членов

$$2u=2y, \text{ т. е. } u=y.$$

Теперь из (2) получим $z=w$, а затем из (3) получим $x=v$. Таким образом, первое из условий означает конгруэнтность

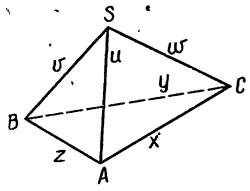


Рис. 37

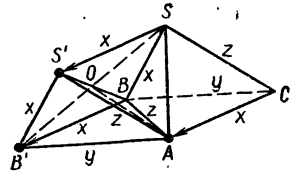


Рис. 38

противоположных ребер пирамиды. Проведем теперь дополнительные построения — совершим параллельный перенос грани SBC на вектор $\vec{CA}$. При этом вершина C перейдет в A, B в B' и S в S'. Фигура $SS'B'B$ — ромб, так как $S'B'$ конгруэнтно SB и SS' конгруэнтно BB' по построению, а SB конгруэнтно AC и, значит, SS', как это было показано выше. Обозначим точку пересечения диагоналей этого ромба буквой O. Заметим, что треугольник SAB' — равнобедренный, так как $B'A$ конгруэнтно по построению BC, а BC конгруэнтно SA, как уже было показано. Аналогично равнобедренным является треугольник $S'AB$. Теперь заметим, что поскольку диагонали ромба делятся в точке пересечения пополам, то отрезок AO является медианой, а значит, и высотой в треугольниках SAB' и $S'AB$. Это означает, что AO перпендику-

лярен плоскости ромба $SS'B'B$. Отметим теперь, что пирамида $S'B'BA$ имеет тот же объем, что и пирамида $SABC$. Действительно, треугольники $BB'A$ и ABC конгруэнтны (по трем сторонам), и высоты, опущенные из S' и S на плоскость $AB'BC$, конгруэнтны, так как одна из другой получаются параллельным переносом на $\overrightarrow{AC}$. Наконец, обозначим α (рис. 38) величину угла $S'BB'$ и заметим, что весь угол $B'BS$ имеет величину 2α, так как диагональ ромба делит угол при вершине пополам. Рассмотрим теперь треугольник $S'B'B$ (рис. 39). Его площадь равна

$$\frac{1}{2}x\cdot x\cdot \sin\widehat{S'B'B}=\frac{1}{2}x^2\cdot\sin(\pi-2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{x^2\sqrt{2}}{3}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\sin(\pi-2\alpha)=\sin 2\alpha$ (поэтому все равно, тупой или острый угол SBB'), и тем, что $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ для всех $x\in[0,\pi]$. Найдем теперь высоту $h=|AO|$ пирамиды $AS'BB'$. Заметим, что (см. рис. 39)

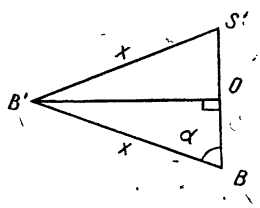


Рис. 39

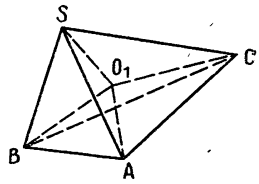


Рис. 40

$|B'O|=x\sin\alpha$ и $|OB|=x\cos\alpha$. Из прямоугольных треугольников $B'OA$ и BOA получаем по теореме Пифагора

$$|OA|^2=y^2-|OB'|^2=y^2-x^2\sin^2\alpha, \qquad (4)$$

$$|OA|^2=z^2-|OB|^2=z^2-x^2\cos^2\alpha, \qquad (5)$$

откуда, сложив (4) и (5), мы видим, что $2|OA|^2=y^2+z^2-x^2=12-x^2$, так как по условию задачи $y^2+z^2=12$. Теперь имеем объем

$$V_{AS'BB'}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{2}}{3}\cdot|OA|=\frac{x^2}{9}\sqrt{12-x^2}.$$

С другой стороны, мы можем заметить, что так как все грани исходной пирамиды конгруэнтны, центр вписанного шара O_1 разбивает пирамиду на 4 конгруэнтные пирамиды с вершинами в O_1 и основаниями — гранями пирамиды (рис. 40). В каждой из этих пирамид высотой, опущенной из O_1, является радиус вписанного шара, а площади оснований равны между собой и равны S_{ABC}. Поэтому объем

$$V_{SABC} = 4V_{O_1ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\,S_{ABC}.$$

Найдем S_{ABC}, она, очевидно, равна $\frac{1}{2}yz\sin\widehat{CBA}$. Воспользуемся тем, что по теореме косинусов

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\widehat{CBA} = 12 - 2yz\cos\widehat{CBA},$$

откуда

$$\cos\widehat{CBA} = \frac{12 - x^2}{2yz},$$

и, значит,

$$\sin\widehat{CBA} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{CBA}} = \frac{1}{2yz}\sqrt{4y^2z^2 - (12 - x^2)^2}$$

и

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{4y^2z^2 - (12 - x^2)^2}.$$

Вычитая из уравнения (4) уравнение (5), получим

$$y^2 - z^2 + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0, \text{ т. е. } x^2\cos 2\alpha = z^2 - y^2.$$

Заметим, что $\cos 2\alpha$ равен либо $-\frac{1}{3}$, либо $\frac{1}{3}$ в зависимости от того, является угол ABB' тупым или острым. Без ущерба для общности можно считать, что $z \geqslant y$ (поскольку при замене z на y и y на z пирамида $SBAC$ переходит в конгруэнтную себе). В таком случае $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ и, учитывая, что $z^2 + y^2 = 12$, имеем

$$\begin{cases} z^2 - y^2 = \frac{1}{3}x^2 \\ z^2 + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 6 - \frac{x^2}{6}, \\ z^2 = 6 + \frac{x^2}{6}. \end{cases}$$

Отсюда $4y^2z^2 = 144 - \frac{x^4}{9}$ и, значит,

$$S_{ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{144-\frac{x^4}{9}-144+24x^2-x^4}=$$

$$=\frac{x}{4}\sqrt{24-\frac{10}{9}x^2}$$

и

$$V_{SABC}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\cdot\frac{x}{4}\sqrt{24-\frac{10}{9}x^2}=$$

$$=\frac{x}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\cdot\sqrt{24-\frac{10}{9}x^2}.$$

Поскольку $V_{AS'BB'}=V_{SABC}$, как уже говорилось выше, мы получаем уравнение для нахождения x:

$$\frac{x}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{24-\frac{10}{9}x^2}=\frac{x^2}{9}\sqrt{12-x^2}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) легко преобразуется в уравнение

$$13x^4-186x^2+648=0,$$

откуда имеем

$$x^2=\frac{186\pm 30}{26}, \text{ т. е. } \begin{cases} x^2=\dfrac{108}{13}, & (7)\\ x^2=6. & (8)\end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1 случай. Пусть $x^2=\frac{108}{13}$, тогда объем $V_{SABC}=\frac{48}{13}\sqrt{\frac{3}{13}}$. Покажем, что он больше, чем $\frac{5}{3}$:

$$\frac{48}{13}\sqrt{\frac{3}{13}}>\frac{5}{3}\Leftrightarrow 48\cdot 3\sqrt{3}>5\cdot 13\cdot\sqrt{13}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 48^2\cdot 3^3>5^2\cdot 13^3\Leftrightarrow 62208>54925 \text{ — верное неравенство.}$$

2 случай. Пусть $x^2=6$, тогда $V_{SABC}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Покажем, что $\frac{2\sqrt{6}}{3}<\frac{5}{3}$. Действительно,

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{24}}{3}<\frac{\sqrt{25}}{3}=\frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Вариант I

1. Найти все корни уравнения

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{8} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2},$$

расположенные в промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

2. Найти координаты точки C, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек A (1; 2; 3) и B (2; 3; 4).

3. Решить уравнение

$$3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0.$$

4. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = |x^2 - 4|$, отрезком $[-1; 2]$ оси Ox и прямой $x = -1$.

5. В треугольнике ABC $\widehat{BCA} = \alpha$, $\widehat{BAC} = \beta$, $|AC| = b$. На стороне BC взята точка D так, что $|BD| = 3|DC|$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или ее продолжения за точку A. Найти радиус этой окружности.

6. Точка O — общая вершина двух конгруэнтных конусов, расположенных по одну сторону от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса (OA для одного конуса и OB для другого) принадлежит плоскости α. Известно, что величина угла между высотами конусов равна β, а величина угла между высотой и образующей конуса равна φ, причем $2\varphi < \beta$. Найти величину угла между образующей OA и плоскостью основания другого конуса, которой принадлежит точка B.

Вариант II

1. Найти все корни уравнения

$$\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{5} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

расположенные в промежутке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{9\pi}{4}\right]$.

2. Даны точки A (−1; 2; −2) и B (3; 1; 2). Найти расстояние от начала координат до середины отрезка $[AB]$.

3. Решить уравнение

$$5\sqrt{\log_2 x} - \log_2 4x - 4 = 0.$$

4. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)=|9-x^2|$, отрезком $[-5;\ -3]$ оси Ox и прямой $x=-5$.

5. На стороне угла с вершиной O взяты точки A и B (A между O и B) так, что $|OA|=3|AB|$. Через точки A и B проведена окружность, касающаяся другой стороны угла в точке D. На луче OD взята точка E (D между O и E). Известно, что $|OE|=m$, $\widehat{BOE}=\alpha$, $\widehat{BEO}=\beta$. Найти радиус окружности.

6. Два конгруэнтных конуса с общей вершиной D расположены по разные стороны от плоскости α так, что только одна образующая каждого конуса (DE для одного конуса и DF для другого) принадлежит плоскости α. Известно, что $\widehat{EDF}=\varphi$, а величина угла между линией пересечения плоскостей основания конусов и плоскостью α равна β. Найти величину угла между высотой и образующей каждого конуса.

Разбор задач варианта I

Задача 1. Очевидно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2},$$

решая которое, получим

$$x+\frac{\pi}{8}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,$$

$$\text{т. е. } x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k-\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Для простоты рассмотрим два случая четности k.

1) Пусть $k=2n$, тогда $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}+2n\pi=\frac{\pi}{24}+2n\pi$; поскольку по условию задачи $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$, , то

$$-\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{24}+2n\pi\leqslant\pi\Leftrightarrow-\frac{37}{24}\leqslant 2n\leqslant$$

$$\leqslant\frac{23}{24}\Leftrightarrow-\frac{37}{48}\leqslant n\leqslant\frac{23}{48},\ \text{т. е. } n=0\ \text{и}\ x=\frac{\pi}{24}.$$

2) Пусть $k=2n+1$, тогда

$$x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}+2n\pi+\pi=\frac{17}{24}\pi+2n\pi;$$

поскольку $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, то $-\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{17}{24}\pi + 2n\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{53}{24} \leqslant 2n \leqslant \frac{7}{24} \Leftrightarrow -\frac{53}{48} \leqslant n \leqslant \frac{7}{48}$, т. е. либо $n=-1$, либо $n=0$. Соответственно получаем

$$x = \frac{17\pi}{24} - 2\pi = -\frac{31\pi}{24}$$

или

$$x = \frac{17}{24}\pi.$$

Ответ: $\left\{-\frac{31}{24}\pi, \frac{\pi}{24}, \frac{17}{24}\pi\right\}$.

Задача 2. Пусть C имеет координаты $(x, 0, 0)$. Квадрат расстояния от C до A равен $d^2(C, A) = (x-1)^2+2^2+3^2$. Аналогично $d^2(C, B) = (x-2)^2+3^2+4^2$. По условию задачи $d^2(C, A) = d^2(C, B)$, откуда $(x-1)^2+13 = (x-2)^2+25$, т. е. $x = \frac{15}{2}$.

Ответ: $C\left(\frac{15}{2}, 0, 0\right)$.

Задача 3. Перепишем исходное уравнение в виде

$$3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3 - \log_3 x - 1 = 0,$$

т. е.

$$\log_3 x - 3\sqrt{\log_3 x} + 2 = 0. \qquad (1)$$

Заменим $\sqrt{\log_3 x} = t$, тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $t^2-3t+2=0$, откуда $t = \frac{3 \pm 1}{2}$. Таким образом.

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\log_3 x} = 2 \\ \sqrt{\log_3 x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 4 \\ \log_3 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^4 = 81, \\ x = 3^1 = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{3; 81\}$.

Задача 4. Заметим, что при $-2 \leqslant x \leqslant 2$ выражение $x^2-4 \leqslant 0$, поэтому на отрезке $[-1, 2]$ имеем $f(x) = 4-x^2$. Вид криволинейной трапеции изображен на рис. 41. Итак,

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 8 - \frac{8}{3} - \left(-4 + \frac{1}{3}\right) = 9.$$

Ответ: 9 кв. ед.

Задача 5. Чертеж к задаче представлен на рис. 42. Пусть $|DC|=x$, тогда по условию задачи $|BD|=3x$ и, значит, $|BC|=4x$. Кроме того, пусть указанная окружность имеет радиус r и центр O, тогда указанное в задаче условие, гласящее, что окружность касается стороны AC или ее про-

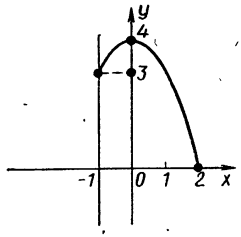


Рис. 41

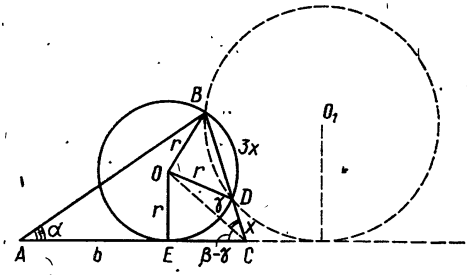


Рис. 42

должения за точку A, означает, что в треугольнике OEC угол $\widehat{OCE}$ — острый. Обозначим $\widehat{OCD}=\gamma$, тогда $\widehat{OCE}=\beta-\gamma$ и указанное условие имеет вид

$$0<\beta-\gamma<\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Далее, теорема синусов позволяет найти длину стороны BC и, значит, x. Действительно,

$$\frac{4x}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin(\pi-\alpha-\beta)},$$

откуда

$$4x=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{2}$$

Применив теорему косинусов для $\triangle OBC$, получим

$$r^2=(4x)^2+|OC|^2-2\cdot 4x\cdot|OC|\cdot\cos\gamma. \tag{3}$$

Аналогично из $\triangle ODC$ получаем

$$r^2=x^2+|OC|^2-2x|OC|\cdot\cos\gamma. \tag{4}$$

Заметим, что из $\triangle OCE$ мы можем выразить $|OC|$:

$$|OC|=\frac{r}{\sin(\beta-\gamma)}. \tag{5}$$

Равенство (5) позволит исключить из уравнений (3)—(4) ве-

личину $|OC|$:

$$\begin{cases} r^2 = 16x^2 + \dfrac{r^2}{\sin^2(\beta-\gamma)} - 8xr\dfrac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}, & (6) \\ r^2 = x^2 + \dfrac{r^2}{\sin^2(\beta-\gamma)} - 2xr\dfrac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}. & (7) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (6) уравнение (7), получаем

$$0 = 15x^2 - 6xr\frac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)},$$

поскольку $x\neq 0$, отсюда имеем

$$x = \frac{2}{5}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}\cdot r. \qquad (8)$$

Подставляя это выражение вместо x в уравнение (6) и сокращая на $x^2\neq 0$, получим

$$\frac{25}{4} = 16\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2(\beta-\gamma)} + \frac{25}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2(\beta-\gamma)} - 8\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2(\beta-\gamma)},$$

т. е. уравнение

$$16\cos^2\gamma = 25\cos^2(\beta-\gamma),$$

которое равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\beta-\gamma) = \dfrac{4}{5}\cos\gamma, & (9) \\ \cos(\beta-\gamma) = -\dfrac{4}{5}\cos\gamma. & (10) \end{array}\right.$$

Из уравнения (8), как, впрочем, и из геометрических соображений, видно, что $\cos\gamma > 0$; поэтому условие (1) выполняется только для уравнения (9). Заметим, кстати, что уравнение (10) соответствует случаю касания окружности прямой AC за точкой C. Итак, поскольку $\sin\beta\neq 0$ (ибо $0<\beta<\pi$), имеем:

$$(9) \Leftrightarrow \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma = \frac{4}{5}\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta + \sin\beta\operatorname{tg}\gamma = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{4}{5}-\cos\beta}{\sin\beta}. \qquad (11)$$

С другой стороны,

$$(8) \Leftrightarrow r=\frac{5}{2}\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\gamma}x=\frac{5}{2}x\cdot\frac{\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma}{\cos\gamma}=$$

$$=\frac{5}{2}x(\sin\beta-\cos\beta\operatorname{tg}\gamma). \qquad (12)$$

Подставляя в равенство (12) выражение (11) для $\operatorname{tg}\gamma$ и выражение (2) для x, получим

$$r=\frac{5}{8}\cdot\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\left(\sin\beta-\cos\beta\frac{\frac{4}{5}-\cos\beta}{\sin\beta}\right)=$$

$$=\frac{5}{8}\cdot\frac{b\sin\alpha\left(1-\frac{4}{5}\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}.$$

Ответ: $r=\frac{5}{8}\frac{b\cdot\sin\alpha\left(1-\frac{4}{5}\cdot\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}$.

Задача 6. Прежде всего заметим (рис. 43), что угол между произвольной прямой AC и плоскостью γ равен $\frac{\pi}{2}-\widehat{BAC}$, где $\widehat{BAC}$ — величина острого угла между прямой AC и перпендикуляром AB к плоскости γ. Таким образом, поскольку высота конуса перпендикулярна плоскости основания, то достаточно найти острый угол между высотой одного конуса и образующей OA другого конуса. Пусть $|OD|=l$, поскольку конусы конгруэнтны, то высота OC другого конуса также имеет длину l. По условию задачи $\widehat{DOC}=\beta$, поэтому (рис. 44), воспользовавшись теоремой косинусов, получим

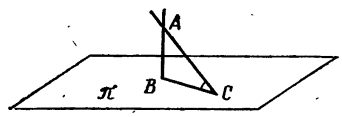


Рис. 43

$$|DC|^2=l^2+l^2-2l^2\cos\beta=2l^2(1-\cos\beta).$$

Опустим из точек D и C перпендикуляры на плоскость α, их основания обозначим E и F соответственно. Поскольку треугольники BDO и ACO конгруэнтны (они оба прямоугольные, имеют одинаковые острые углы $\widehat{DOB}=\widehat{AOC}=\varphi$ и $|DO|=|OC|$), то $|DE|=|CF|$. Из $\triangle OCF$ получаем (так как по построению $\widehat{CFO}=\frac{\pi}{2}$)

$$|CF|=|OC|\sin\varphi=l\sin\varphi,\ |OF|=l\cdot\cos\varphi.$$

Теперь заметим, что четырехугольник $DEFC$ — прямоугольный, поскольку $(DE)\parallel(CF)$ как перпендикуляры к одной плоскости α и $|DE|=|CF|$. Это позволяет по теореме Пифагора найти длину диагонали DF:

$$|DF|^2=|DC|^2+|CF|^2=2l^2(1-\cos\beta)+l^2\cdot\sin^2\varphi=$$
$$=l^2(2-2\cos\beta+\sin^2\varphi).$$

Воспользовавшись теоремой косинусов для $\triangle ODF$, получаем уравнение для косинуса искомого угла

$$|DF|^2=|OD|^2+|OF|^2-2|OD|\cdot|OF|\cos\widehat{DOF},$$

т. е.

$$l^2(2-2\cos\beta+\sin^2\varphi)=l^2+l^2\cos^2\varphi-2l^2\cos\varphi\cos\widehat{DOF},$$

откуда

$$\cos\widehat{DOF}=\frac{\cos\beta-\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \qquad (1)$$

Покажем, что правая часть (1) не превосходит по модулю единицы. Пусть OG — перпендикуляр к плоскости α. Заме-

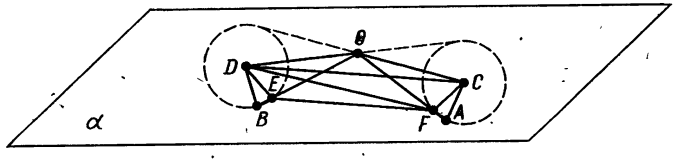


Рис. 44

тим, что по свойству плоских углов трехгранного угла имеем $\widehat{GOC}+\widehat{DOG}\geqslant\widehat{DOC}$ (равенство в том случае, когда лучи OD, OC и OG лежат в одной плоскости). С другой стороны, $\widehat{GOC}=\widehat{DOG}=\frac{\pi}{2}-\varphi$ и $\widehat{DOC}=\beta$, поэтому

$$\pi-2\varphi\geqslant\beta>2\varphi. \qquad (2)$$

Из неравенства (2), в частности, следует, что $\pi-2\varphi>2\varphi$, т. е. $\varphi<\frac{\pi}{4}$ и, кроме того, поскольку $\cos x$ убывает при $x\in[0,\pi]$, то $\cos(\pi-2\varphi)\leqslant\cos\beta<\cos 2\varphi$ и, значит, $\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\leqslant\cos\beta$, т. е. $\cos\beta-\sin^2\varphi\geqslant-\cos^2\varphi$.

Поскольку $\cos\varphi>0$ при $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{\cos\beta-\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\geqslant-\cos\varphi\geqslant-1.$$

Осталось доказать, что

$$\frac{\cos\beta-\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\leqslant 1. \qquad (3)$$

Заметим, что поскольку $1>\cos\varphi>0$, то $(3)\Leftrightarrow\cos\beta\leqslant\sin^2\varphi+\cos\varphi=1+\cos\varphi\cdot(1-\cos\varphi)$. Очевидно, $\cos\varphi(1-\cos\varphi)>0$, поэтому

$$\cos\beta\leqslant 1<1+\cos\varphi(1-\cos\varphi)=\sin^2\varphi+\cos\varphi,$$

что и доказывает неравенство (3).

Итак, при указанных условиях уравнение (1) имеет решения. Поскольку нам требуется найти острый угол DOF, то

$$\widehat{DOF}=\begin{cases}\arccos\dfrac{\cos\beta-\sin^2\varphi}{\cos\varphi} & \text{при } \cos\beta\geqslant\sin^2\varphi,\\ \pi-\arccos\dfrac{\cos\beta-\sin^2\varphi}{\cos\varphi} & \text{при } \cos\beta\leqslant\sin^2\varphi.\end{cases}$$

Искомый угол, как указывалось вначале, равен $\frac{\pi}{2}-DOF$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{\cos\beta-\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ при $\cos\beta\geqslant\sin^2\varphi$;

$-\frac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{\cos\beta-\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ при $\cos\beta\leqslant\sin^2\varphi$.

§ 4. ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Вариант I

1. Решить уравнение

$$\log_7\left(\frac{x+3}{21}\right)=\log_7\left(\frac{2}{3x-6}\right).$$

2. Найти все решения уравнения

$$2\cos^2(3x)-\cos(3x)=0.$$

3. На координатной плоскости рассматриваются прямоугольные треугольники ABC ($\widehat{ACB}=90°$), у каждого из которых вершина A имеет координаты $(-4; 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0; 4]$ оси Ox, а вершина B лежит на параболе $y=4x-x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B, чтобы площадь прямоугольного треугольника ABC была наибольшей?

4. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведен перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L — основание этого

перпендикуляра). Найти величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $LMBC$ равна S.

5. Найти все такие значения a, для каждого из которых число решений относительно x уравнения

$$3(x^2+a^2)=1-(9a^2-2)x$$

не превосходит числа решений относительно y уравнения

$$y+(3a-2)^2\cdot 3^y=(8^a-4)\log_3\left(3^a-\frac{1}{2}\right)-3y^3.$$

Вариант II

1. Решить уравнение

$$\log_3(1-x)=\log_3\left(\frac{6}{2-x}\right).$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2}\sin^2(5x)-\sin(5x)=0.$$

3. На координатной плоскости рассматриваются прямоугольные треугольники ABC ($\widehat{ACB}=90°$), у каждого из которых вершина A имеет координаты (1; 0), вершина C лежит на отрезке [0; 1] оси Ox, а вершина B лежит на параболе $y=x-x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B, чтобы площадь прямоугольного треугольника ABC была наибольшей?

4. Площадь ромба $ABCD$ равна 2. В треугольник ABD, образованный сторонами AB, AD и диагональю BD данного ромба, вписана окружность, которая касается стороны AB в точке K. Через точку K проведена прямая KL, параллельная диагонали AC ромба (точка L лежит на стороне BC). Найти величину угла BAD, если известно, что площадь треугольника KBL равна a.

5. Найти все такие значения k, для каждого из которых число решений относительно x уравнения

$$2x^3+6x=(3^{6k}-9)\sqrt{2^{8k}-\frac{1}{6}}-(3k-1)^2\cdot 12^x$$

не меньше числа решений относительно y уравнения

$$3(5y^2-k^4)-2y=2k^2(6y-1).$$

Разбор задач варианта I

Задача 1. Корни данного уравнения удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{21} > 0, \\ \dfrac{2}{3x-6} > 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x+3>0, \\ 3x-6>0. \end{cases}$$

Откуда получаем $x \in]2; +\infty[$.
При $x>2$ данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{x+3}{21} = \frac{2}{3x-6},$$

откуда $x^2+x-20=0$, т. е. $x_1=4$, $x_2=-5$. С учетом того, что $x \in]2; +\infty[$, получаем $x=4$.

Ответ: $\{4\}$.

Задача 2. Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0, \\ 2\cos 3x - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Решая первое уравнение совокупности, получаем

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \text{ т. е. } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k.$$

Решая второе уравнение совокупности, получаем

$$3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \text{ т. е. } x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} k$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$ $(k, n \in \mathbf{Z})$.

Задача 3. Пусть x — абсцисса точки C (рис. 45). Площадь треугольника ABC равна

$$S(x) = \frac{(x+4)(4x-x^2)}{2} = \frac{16x-x^3}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Таким образом, дело свелось к нахождению наибольшего значения функции $S(x)$ на $[0; 4]$. Вычислим производную от $S(x)$ и приравняем ее к нулю:

$$S'(x) = 8 - \frac{3}{2} x^2 = 0;\ x_1 = -\frac{4}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

x_1 следует отбросить, так как это число не принадлежит $[0; 4]$. Так как $S(0)=0$, $S(4)=0$, а $S\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) > 0$, то в точке $x_2=$

$=4/\sqrt{3}$ действительно достигается наибольшее значение $S(x)$. При этом ордината точки B равна

$$4\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}(\sqrt{3}-1).$$

Ответ: $B\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)\right)$.

Задача 4. Пусть BD — высота треугольника ABC (рис. 46). Так как треугольник ABC равнобедренный, то

$$S_{ABD}=S_{DBC}=\frac{1}{2};\ S_{AML}=1-S_{LMBC}=1-S.$$

Воспользовавшись теоремой о том, что площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон,

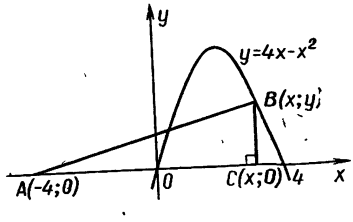


Рис. 45

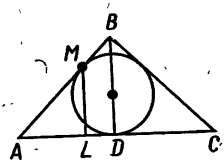


Рис. 46

и заметив, что $|AM|=|AD|$ (длины касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны), получим

$$\frac{S_{AML}}{S_{ABD}}=\frac{|AM|^2}{|AB|^2}=\frac{|AD|^2}{|AB|^2}=\cos^2\widehat{BAC}=\cos^2\widehat{BCA},$$

или $\frac{1-S}{\frac{1}{2}}=\cos^2\widehat{BCA}$, откуда $\widehat{BCA}=\arccos\sqrt{2(1-S)}$.

Ответ: $\widehat{BCA}=\arccos\sqrt{2(1-S)}$.

Задача 5. Из второго уравнения следует, что $3^a-\frac{1}{2}>0$. Покажем, что при любом значении a, удовлетворяющем этому условию, второе уравнение не может иметь более одного решения. Рассуждаем от противного. Пусть y_1, y_2 — два разных решения второго уравнения и пусть для определенности $y_2>y_1$. Тогда

$$y_2+(3a-2)^2\cdot 3^{y_2}+3y_2^3=y_1+(3a-2)^2\cdot 3^{y_1}+3y_1^3,$$

$$y_2 - y_1 + (3a-2)^2 \cdot (3^{y_2} - 3^{y_1}) + 3(y_2^3 - y_1^3) = 0,$$

что невозможно, так как слева в последнем равенстве стоит положительная величина.

Первое уравнение запишем так:

$$3x^2 + (9a^2 - 2)x + 3a^2 - 1 = 0,$$

отсюда

$$x_{1,2} = \frac{-(9a^2-2) \pm \sqrt{(9a^2-2)^2 - 4 \cdot 3(3a^2-1)}}{6} =$$

$$= \frac{2 - 9a^2 \pm \sqrt{(9a^2-4)^2}}{6},$$

$$x_{1,2} = \frac{2 - 9a^2 \mp |9a^2 - 4|}{6}.$$

Таким образом, квадратное уравнение при любом a имеет решение. Случай $a \neq \pm \frac{2}{3}$ следует отбросить, так как в этом случае первое уравнение будет иметь два решения, т. е. больше, чем число решений второго уравнения.

Пусть теперь $a = -\frac{2}{3}$. В этом случае $3^a - \frac{1}{2} = 3^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} < 0$, т. е. второе уравнение не имеет смысла, а тем самым не имеет решения, в то время как первое уравнение имеет одно решение.

При $a = \frac{2}{3}$ имеем $3^a - \frac{1}{2} = 3^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} > 0$. Второе уравнение принимает вид $y + 3y^3 = 0$; оно имеет только одно решение $y = 0$, и, следовательно, это значение a удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = \frac{2}{3}$.

§ 5. БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Вариант I

1. Решить уравнение

$$1 + 2\cos 3x \cdot \cos x - \cos 2x = 0.$$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ на отрезке $[-5; 4]$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x.$$

4. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26 м. Величина угла ABC равна 120°. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$ м. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB.

5. Найти все те решения уравнения

$$3\sin^3x-3\cos^2x+7\sin x-\cos 2x+1=0,$$

которые являются также решениями уравнения

$$\cos^2x+3\cos x\cdot\sin 2x-8\sin x=0.$$

Вариант II

1. Решить уравнение

$$\sin 5x-1=2\sin x\cdot\cos 4x.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=x^3-9x^2+15x+1$ на отрезке $[-2; 6]$.

3. Решить неравенство

$$x+4<\sqrt{-x^2-8x-12}.$$

4. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$ м^2. Величина угла BAC равна 120°. Величина угла ABC больше величины угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2 м. Найти длину медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B.

5. Найти все те решения уравнения

$$9\sin^2x-5\sin x\cdot\sin 2x+17\cos x-11=0,$$

которые являются также решениями уравнения

$$5\cos^3x-3\sin^2x+8\cos x-1=0.$$

Разбор задач варианта I

Задача 1. Воспользуемся формулой

$$\cos 3x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x),$$

получаем уравнение, равносильное исходному

$$1+\cos 4x=0,$$

или

$$\cos 4x=-1.$$

Откуда получаем $4x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$,

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$.

Задача 2. Найдем критические точки функции $y(x)$

$$y'(x)=6x^2-6x-36=0,$$

откуда $x_1=-2$, $x_2=3$. Обе полученные точки лежат внутри рассматриваемого отрезка. Имеем: $y(-5)=-135$; $y(-2)=54$; $y(3)=-71$; $y(4)=-54$. Отсюда получаем

$$\max_{[-5;4]} y(x)=y(-2)=54;\ \min_{[-5;4]} y(x)=y(-5)=-135.$$

Ответ: $\max\limits_{[-5;4]} y(x)=54$, $\min\limits_{[-5;4]} y(x)=-135$.

Задача 3. Найдем область определения входящих в неравенство функций. Она определяется из неравенства

$-x^2+6x-5\geqslant 0$, откуда получаем $1\leqslant x\leqslant 5$.

1) Если $4<x\leqslant 5$, то $8-2x<0$, а $\sqrt{-x^2+6x-5}\geqslant 0$ и поэтому все точки промежутка]4; 5] являются решениями данного неравенства.

2) Если $1\leqslant x\leqslant 4$, то обе части исходного неравенства неотрицательны. После возведения в квадрат обеих частей данного неравенства получаем неравенство

$$-x^2+6x-5>64-32x+4x^2,$$

или

$$5x^2-38x+69<0,$$

которое равносильно исходному на промежутке [1; 4].

Решениями последнего квадратного неравенства будут точки промежутка $]3;\ 4^3/_5[$, а с учетом того, что рассматриваются точки отрезка [1; 4], получаем $3<x\leqslant 4$. Итак, все точки промежутка]3; 4] будут также решениями исходного неравенства. Окончательно получаем, что данному неравенству удовлетворяют точки промежутка]3; 5].

Ответ:]3; 5].

Задача 4. Чертеж к этой задаче представлен на рис. 47. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник BCD, а M, N, K — точки касания этой окружности со сторонами треугольника. В треугольнике OMC имеем

$$\widehat{OMC}=90^\circ,\ \widehat{OCM}=30^\circ,\ |OM|=\sqrt{3}\text{ м},$$

поэтому $|MC|=3$ м, а следовательно, $|CN|=3$ м. Так как $|BC|+|CD|=13$ м, поэтому

$$|BD|=|BK|+|KD|=|BM|+|DN|=$$
$$=|BC|-3+|DC|-3=7 \text{ м}.$$

По теореме косинусов из треугольника BCD имеем

$$49=|BD|^2=|BC|^2+|CD|^2-2\cdot\cos\widehat{BCD}\cdot|BC|\cdot|CD|=$$
$$=|BC|^2+|CD|^2-|BC|\cdot|CD|.$$

Осталось решить систему уравнений

$$\begin{cases}|BC|+|CD|=13,\\ |BC|^2+|CD|^2-|BC|\cdot|CD|=49.\end{cases}$$

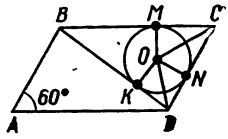


Рис. 47

Из этой системы с учетом условия $|AD|>|AB|$, т. е. $|BC|>|CD|$, получаем $|BC|=8$ м, $|CD|=5$ м.

Ответ: $|AB|=|CD|=5$ м, $|AD|=|BC|=8$ м.

Задача 5. Решения задачи есть решения системы уравнений

$$\begin{cases}3\sin^3 x-3\cos^2 x+7\sin x-\cos 2x+1=0,\\ \cos^2 x+3\cos x\cdot\sin 2x-8\sin x=0.\end{cases}$$

После замены $t=\sin x$ получим систему

$$\begin{cases}3t^3+5t^2+7t-3=0,\\ 6t^3+t^2+2t-1=0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}6t^3+10t^2+14t-6=0,\\ 6t^3+t^2+2t-1=0,\end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases}9t^2+12t-5=0,\\ 6t^3+t^2+2t-1=0.\end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет решения:

$$t_1=-\frac{15}{9},\ t_2=\frac{1}{3};$$

$t_1=-\frac{15}{9}$ не является решением второго уравнения системы и, следовательно, решением системы; $t_2=\frac{1}{3}$ является решением второго уравнения системы и, следовательно, решением системы.

Итак, решением системы будет $t=\frac{1}{3}$, т. е. $\sin x=\frac{1}{3}$, откуда $x=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\left\{(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$.

§ 6. ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ

Вариант I

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-y=6, \\ x^3-y^3=126. \end{cases}$$

2. Найти все значения x, при которых производная функция

$$y=4x-\sin 2x+4\sqrt{2}\cos x$$

равна нулю.

3. Хорды AB и AC имеют одинаковую длину. Величина образованного ими вписанного в окружность угла равна $\pi/6$. Найти отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

4. Решить неравенство

$$(4x^2-16x+7)\cdot\log_2(x-3)>0.$$

Вариант II

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=7, \\ (x^2-y^2)(x-y)=175. \end{cases}$$

2. Найти все значения x, при которых производная функции

$$y=5x+\sin 2x-4\sqrt{3}\sin x$$

равна нулю.

3. На основании равностороннего треугольника как на диаметре построена полуокружность, рассекающая треугольник на две части. Длина стороны треугольника равна a см. Найти площадь той части треугольника, которая лежит вне полукруга.

4. Решить неравенство

$$(2^x-4)(x^2-2x-3)>0.$$

Разбор задач варианта I

Задача 1. Исходная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} y = x - 6, \\ x^3 - (x-6)^3 = 126, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} y = x - 6, \\ x^2 - 6x + 5 = 0. \end{cases}$$

Решениями второго уравнения системы будут $x_1 = 1$; $x_2 = 5$. Из первого уравнения $y_1 = -5$, $y_2 = -1$.

Ответ: $\{(1; -5), (5; -1)\}$.

Задача 2. Так как $y' = 4 - 2\cos 2x - 4\sqrt{2}\sin x$, то получаем тригонометрическое уравнение

$$4 - 2\cos 2x - 4\sqrt{2}\sin x = 0.$$

Воспользовавшись формулой $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, получаем равносильное уравнение

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0,$$

откуда

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ поэтому } x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in Z.$$

Ответ: $\left\{(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}\right\}$.

Задача 3. Чертеж к задаче представлен на рис. 48.

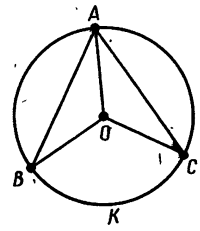


Рис. 48

Соединим точку O — центр окружности с точками A, B и C. Пусть длина радиуса окружности равна r, т. е. $|AO| = |BO| = |CO| = r$. Треугольники ABO и ACO конгруэнтны по трем сторонам.

$$\widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\pi}{12};$$

$$\widehat{BOA} = \widehat{COA} = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{6};$$

$$\widehat{BOC} = 2\pi - 2 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Вычислим площадь части круга, заключенной в угле BAC:

$$S_{ABKC} = 2S_{\Delta AOB} + S_{\text{сектора } OBKC} = 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \widehat{AOB}}{2} +$$

$$+\frac{r^2\cdot\widehat{BOC}}{2}=r^2\cdot\sin\frac{5\pi}{6}+\frac{r^2\cdot\pi}{6}=\frac{r^2}{2}+\frac{\pi r^2}{6}=\frac{r^2(\pi+3)}{6}$$

Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{S_{ABKC}}{S_{\text{круга}}}=\frac{r^2(\pi+3)}{6\cdot\pi r^2}=\frac{\pi+3}{6\pi}.$$

Ответ: $\frac{\pi+3}{6\pi}$.

Задача 4. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}4x^2-16x+7>0,\\ \log_2(x-3)>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}4x^2-16x+7<0,\\ \log_2(x-3)<0.\end{cases}$$

Неравенству $4x^2-16x+7>0$ удовлетворяют все $x<\frac{1}{2}$ или $x>\frac{7}{2}$, а неравенству $\log_2(x-3)>0$ удовлетворяют все $x>4$. Поэтому решением первой системы будут все точки промежутка $]4;+\infty[$. Решением неравенства $4x^2-16x+7<0$ будет $\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$, а решением неравенства $\log_2(x-3)<0$ будет $3<x<4$, поэтому второй системе будут удовлетворять все точки из промежутка $]3;\frac{7}{2}[$.

Ответ: $]3;\frac{7}{2}[\cup]4;+\infty[$.

§ 7. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ)

Вариант I

1. Решить уравнение

$$\sin(2x)=2\sqrt{3}\cos^2 x.$$

2. Найти периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда длиной 2 см этой окружности удалена от ее центра на 3 см.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2(x^2+y^2)=5,\\ 2\log_4 x+\log_2 y=4.\end{cases}$$

4. Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день

дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

5. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости следующей системой:

$$\begin{cases} ||x-y|-|y-1||=x-2y+1, \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант II

1. Решить уравнение

$$\sin(2x)+2\sin^2 x=0.$$

2. Найти площадь правильного шестиугольника, описанного около окружности, если известно, что хорда длиной 4 см этой окружности удалена от ее центра на 5 см.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x^2+y^2}=81, \\ \log_2 x+2\log_4 y=1. \end{cases}$$

4. Кулинария, перейдя на изготовление нового торта «Лакомка», продала в первый рабочий день месяца 100 тортов. Каждый следующий рабочий день продажа возрастала на 5 тортов, пока не был досрочно, причем в целое число рабочих дней, выполнен месячный план продажи тортов, составляющий 3150 штук. После этого ежедневно продавалось на 11 тортов меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план, если в месяце 24 рабочих дня?

5. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости следующей системой:

$$\begin{cases} ||x-y|-|y+1||=2y-x+1, \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \leqslant 2. \end{cases}$$

Разбор задач варианта I

Задача 1. Поскольку $\sin(2x)=2\sin x\cdot\cos x$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin x\cdot\cos x=2\sqrt{3}\cdot\cos^2 x,$$

т. е.

$$\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0. \qquad (1)$$

Далее,

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 0, & (2) \\ \sin x = \sqrt{3}\cos x; & (3) \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$

$$(3) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{3} + n\pi \mid k, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

Задача 2. Найдем радиус R окружности. Поскольку перпендикуляр, опущенный из центра окружности, делит

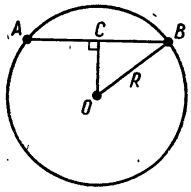


Рис. 49

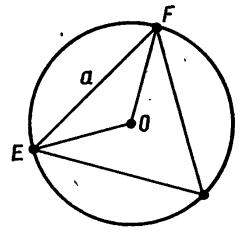


Рис. 50

хорду пополам, то по теореме Пифагора получаем $R^2 = |OC|^2 + |CB|^2 = 10$ (рис. 49), т. е. $R = \sqrt{10}$. Длина a стороны правильного треугольника находится по теореме косинусов (рис. 50):

$$a^2 = |EO|^2 + |OF|^2 - 2|EO| \cdot |OF| \cos\frac{2\pi}{3} = 2R^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 30,$$

т. е. длина $a = \sqrt{30}$, а периметр равен $3\sqrt{30}$ см.

Ответ: $3\sqrt{30}$ см.

Задача 3. Исходная система равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32 \\ \log_2 (xy) = 4 \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 32 \\ xy = 16 \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 = 64 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x + y)^2 = 64 \\ (x - y)^2 = 0 \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = \pm 8, \\ x - y = 0, \\ x > 0. \end{array}\right.$$

Последняя система представляет собой совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ y=x \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-8 \\ x+y=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-8 \\ x=y \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4, \\ y=-4, \\ x>0 \end{cases}$$ (противоречива).

Ответ: $(x; y)=(4; 4)$.

Задача 4. Пусть план был выполнен в n-й день. Поскольку до n-го дня дневная продажа телевизоров возрастала в арифметической прогрессии с первым членом $a_1=105$ и разностью $d=10$, то сумма n членов равна $105n+10\cdot\frac{n(n-1)}{2}$, и по условию задачи имеем:

$$105n+10\frac{n(n-1)}{2}=4000 \Leftrightarrow n^2+20n-800=0. \qquad (1)$$

Решив квадратное уравнение (1), получаем $n=20$ или $n=-40$. Поскольку n — натуральное число, то второй корень, очевидно, не удовлетворяет условию задачи. Итак, план был выполнен на двадцатый день, в этот день было продано $105+(n-1)10=295$ телевизоров.

Таким образом, в последующие дни продавалось по $295-13=282$ телевизора, значит, за оставшиеся 6 дней было продано $282\cdot 6=1692$ телевизора. Поскольку по плану предполагалось продать 4000 телевизоров, то план был перевыполнен на

$$\frac{1692}{4000}\cdot 100=42{,}3 \text{ (процента)}.$$

Ответ: На 42,3%.

Задача 5. Указанная фигура является пересечением круга с центром в точке (1; 1) радиуса 1, задаваемого неравенством $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1$, и фигуры, задаваемой уравнением

$$||x-y|-|y-1||=x-2y+1. \qquad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-y|-|y-1|=x-2y+1, & (2) \\ x-2y+1\geqslant 0; & (3) \end{cases} \\ \begin{cases} |x-y|-|y-1|=-x+2y-1, & (4) \\ x-2y+1\geqslant 0. & (5) \end{cases} \end{array}\right.$$

Далее,

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(x-y)-(y-1)=x-2y+1\\ x-y\geqslant 0\\ y-1\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y\geqslant 0,\\ y-1\geqslant 0;\end{array}\right. \quad (6)\\ \left\{\begin{array}{l}(x-y)+(y-1)=x-2y+1\\ x-y\geqslant 0\\ y-1\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=1,\\ x-y\geqslant 0;\end{array}\right. \quad (7)\\ \left\{\begin{array}{l}-(x-y)-(y-1)=x-2y+1\\ x-y\leqslant 0\\ y-1\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y,\\ y-1\geqslant 0\end{array}\right. \quad (8)\\ \left\{\begin{array}{l}-(x-y)+(y-1)=x-2y+1\\ x-y\leqslant 0\\ y-1\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-2y+1=0,\\ x-y\leqslant 0,\\ y-1\leqslant 0.\end{array}\right. \quad (9)\end{array}\right.$$

Совершенно аналогично разбираемся с уравнением (4)

$$(4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(x-y)-(y-1)=-x+2y-1\\ x-y\geqslant 0\\ y-1\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-2y+1=0,\\ x-y\geqslant 0,\\ y-1\geqslant 0;\end{array}\right. \quad (10)\\ \left\{\begin{array}{l}(x-y)+(y-1)=-x+2y-1\\ x-y\geqslant 0\\ y-1\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=y,\\ y-1\leqslant 0;\end{array}\right. \quad (11)\\ \left\{\begin{array}{l}-(x-y)-(y-1)=-x+2y-1\\ x-y\leqslant 0\\ y-1\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=1;\\ x-y\leqslant 0;\end{array}\right. \quad (12)\\ \left\{\begin{array}{l}-(x-y)+(y-1)=-x+2y-1\\ x-y\leqslant 0\\ y-1\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y\leqslant 0,\\ y-1\leqslant 0.\end{array}\right. \quad (13)\end{array}\right.$$

Теперь заметим, что системы (7) и (8) следуют из системы (6), неравенство (3) можно записать в виде $x-y\geqslant y-1$, поэтому

$$\left\{\begin{array}{l}(2)\\ (3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x-y\geqslant 0\\ y-1\geqslant 0\\ x-y\geqslant y-1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x-y\leqslant 0\\ y-1\leqslant 0\\ x-y=y-1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x-y\geqslant y-1,\\ y-1\geqslant 0;\end{array}\right. \quad (14)\\ \left\{\begin{array}{l}x-y=y-1,\\ y-1\leqslant 0.\end{array}\right. \quad (15)\end{array}\right.$$

Здесь использовано то, что из $x-y\geqslant y-1$ и $y-1\geqslant 0$ следует неравенство $x-y\geqslant 0$, а также из $x-y=y-1$ и $y-1\leqslant 0$ следует неравенство $x-y\leqslant 0$; после этого замечания мы исключили следствия. Совершенно аналогично из системы (13) следуют системы (11) и (12), поэтому

$$\begin{cases}(4)\\(5)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y\leqslant 0\\y-1\leqslant 0\\x-y\geqslant y-1\end{cases}\\\begin{cases}x-y\geqslant 0\\y-1\geqslant 0\\x-y=y-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\x-y\geqslant y-1;\end{cases}\qquad(16)\\\begin{cases}y-1\geqslant 0,\\x-y=y-1.\end{cases}\qquad(17)\end{array}\right.$$

Совокупность систем (15) и (17) равносильна уравнению $x-y=y-1$. В конечном итоге получаем, что

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y\geqslant y-1\\y-1\geqslant 0\end{cases}\\\begin{cases}x-y\geqslant y-1\\x-y\leqslant 0\end{cases}\\x-y=y-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2y+1\geqslant 0,\\y\geqslant 1;\end{cases}\qquad(18)\\\begin{cases}x-2y+1\geqslant 0,\\x-y\leqslant 0;\end{cases}\qquad(19)\\x-2y+1=0.\qquad(20)\end{array}\right.$$

Изобразим теперь это множество на плоскости Oxy. На рис. 51 множество, определяемое системой (18), заштриховано вертикально, системой (19) — горизонтально; уравнение (20) задает прямую. Исходная система определяет множество, изображенное на рис. 52, являющееся объединением двух секторов, которое получается исключением из полукруга сектора A. Площадь сектора A найти легко, центральный угол α является тупым углом между биссектрисой первого квадранта (уравнение $x-y=0$) и горизонтальной прямой (уравнение $y=1$); его величина равна $\frac{3\pi}{4}$. Площадь сектора A равна $\frac{\alpha}{2\pi}\pi r^2=\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{3}{8}\pi$. Площадь заданной

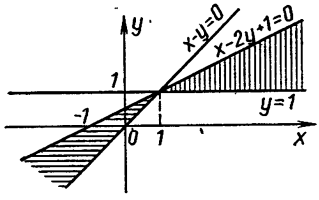


Рис. 51

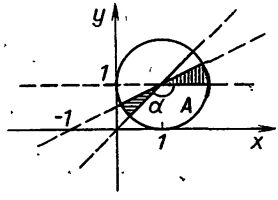


Рис. 52

фигуры равна разности площадей полукруга и сектора A, т. е. равна $\frac{1}{2}\pi - \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{8}$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}$ кв. ед.

§ 8. ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ)

Вариант I

1. Решить неравенство

$$7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{2 - 3\sin x - \cos(2x)}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$$

3. Решить уравнение

$$x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0.$$

4. В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до первой встречи с автомобилем?

5. На сфере радиуса 11 см расположены точки A, A_1, B, B_1, C и C_1. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$ см. Найти длину отрезка AA_1, если известно, что длина отрезка BB_1 равна 18 см, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8+\sqrt{2}) : (8-\sqrt{2})$.

Вариант II

1. Решить неравенство

$$5^x - 5^{3-x} > 20.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos(2x) - 2\cos^2 x - 2}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0.$$

3. Решить уравнение

$$x^2-4|x+1|+5x+3=0.$$

4. В шоссейных гонках стартовали друг за другом с интервалом в 4 с два велосипедиста. Первый из них в первую секунду проехал 7,05 м, а в каждую следующую — на 0,2 м больше, чем в предыдущую. Велосипедист, стартовавший вторым, проехал в первую секунду 10,25 м, а в каждую следующую — на 0,1 м больше, чем в предыдущую. На каком расстоянии от старта велосипедисты поравняются во второй раз?

5. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, концы которых лежат на сфере радиуса 10 см, попарно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Длина отрезка AA_1 равна 12 см, длина отрезка BB_1 равна 18 см. Найти расстояние от центра сферы до точки M, если известно, что отношение длины CM к длине MC_1 равно 11/3.

Разбор задач варианта I

Задача 1. Обозначим $y=7^x$, тогда исходное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{y}-3\cdot 7\cdot y>4,$$

т. е.

$$\frac{21y^2+4y-1}{y}<0. \qquad (1)$$

Поскольку $y=7^x>0$, неравенство (1) равносильно квадратному неравенству

$$21y^2+4y-1<0. \qquad (2)$$

Решив неравенство (2), получаем

$$-\frac{1}{3}<y<\frac{1}{7}, \text{ т. е. } -\frac{1}{3}<7^x<\frac{1}{7}. \qquad (3)$$

Поскольку $7^x>0$, то неравенство (3) равносильно неравенству $7^x<\frac{1}{7}$, откуда $x<-1$.

Ответ: $]-\infty, -1[$.

Задача 2. Заметим, что

$$\frac{2-3\sin x-\cos 2x}{6x^2-\pi x-\pi^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2-3\sin x-\cos 2x=0, & (1)\\ 6x^2-\pi x-\pi^2\neq 0. & (2)\end{cases}$$

Решим уравнение (1):

$$(1) \Leftrightarrow 2-3\sin x-(1-2\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}, \quad (3)\\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in \mathbf{Z}. \quad (4)\end{array}\right.$$

Условие (2) не выполняется только для $x=\frac{\pi}{2}$ или $x=\frac{\pi}{3}$. Из этих значений только $x=\frac{\pi}{2}$ входит в серию (3) корней уравнения $\sin x=1$ при $k=0$, так как

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 1 \text{ и } -\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi \,\middle|\, k, n\in \mathbf{Z},\ k\neq 0\right\}$.

Задача 3. Заметим, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x-3\geqslant 0, & (1)\\ x^2+4x-12-7x+11=0, & (2)\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x-3\leqslant 0, & (3)\\ x^2-4x+12-7x+11=0. & (4)\end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$(2) \Leftrightarrow x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Очевидно, что $\frac{3-\sqrt{13}}{2}<\frac{3}{2}<3$ и, значит, не удовлетворяет условию (1). Проверим выполнение условия (1) для второго корня системы (1)—(2):

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2}\geqslant 3 \Leftrightarrow 3+\sqrt{13}\geqslant 6 \Leftrightarrow \sqrt{13}\geqslant 3 \Leftrightarrow 13\geqslant 9$$

— верное неравенство. Таким образом, решением системы (1)—(2) является

$$x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Решим уравнение (4):

$$(4) \Leftrightarrow x^2-11x+23=0 \Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{29}}{2}.$$

Очевидно, что $x=\frac{11+\sqrt{29}}{2}>3$ и, значит, не удовлетворяет условию (3). Проверим выполнение условия (3) для второго корня:

$$\frac{11-\sqrt{29}}{2}\leqslant 3\Leftrightarrow 11-\sqrt{29}\leqslant 6\Leftrightarrow 5\leqslant\sqrt{29}\Leftrightarrow 25\leqslant 29$$

— верное неравенство. Таким образом, $x=\frac{11-\sqrt{29}}{2}$ является решением системы (3)—(4).

Ответ: $\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ \frac{11-\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Задача 4. Из условия задачи видно, что путь, пройденный автомобилем, является суммой арифметической прогрессии. Обозначим путь автомобиля, пройденный за t-ю секунду, $S_1(t)$, тогда

$$S_1(1)=30,\ S_1(2)=30-2=28,$$
$$S_1(3)=30-2\cdot 2=26,\ \ldots,\ S_1(t)=30-2(t-1).$$

За t секунд автомобиль пройдет

$$S_1(1)+S_1(2)+S_1(3)+\ldots+S_1(t)=\frac{S_1(1)+S_1(t)}{2}\cdot t=$$
$$=\frac{30+30-2(t-1)}{2}\cdot t=31t-t^2.$$

Аналогично, обозначив $S_2(t)$ путь, пройденный автобусом за t-ю секунду, получим, учитывая, что автобус начинает двигаться с десятой секунды:

$$S_2(10)=2,\ S_2(11)=2+1,$$
$$S_2(12)=2+2\cdot 1,\ \ldots,\ S_2(t)=2+1(t-10),$$

и, значит,

$$S_2(10)+S_2(11)+\ldots+S_2(t)=\frac{S_2(10)+S_2(t)}{2}(t-9)=$$
$$=\frac{2+2+t-10}{2}\cdot(t-9)=\frac{1}{2}\cdot t^2-\frac{15}{2}t+27.$$

Если автомобиль встретился с автобусом через t секунд, то сумма путей, пройденных ими за это время, равна 258, т. е.

$$31t-t^2+\frac{1}{2}t^2-\frac{15}{2}t+27=258.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$t^2-47t+462=0,$$

откуда получаем

$$t_1=14 \text{ или } t_2=33.$$

Таким образом, первая встреча произойдет через 14 с после начала отсчета времени. За это время автобус пройдет путь

$$S_2(10)+\ldots+S_2(14)=\frac{1}{2}(14)^2-\frac{15}{2}\cdot 14+27=20\text{м}.$$

Ответ: До первой встречи автобус проедет 20 м.

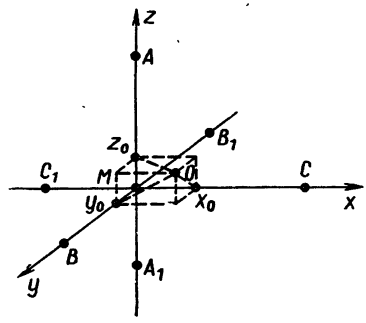


Рис. 53

Задача 5. Рассмотрим систему декартовых координат с центром в точке M такую, что одна из осей совпадает с прямой (AA_1), другая — с прямой (BB_1) и третья — с прямой (CC_1). Пусть сфера имеет центр в этой системе координат в точке O $(x_0; y_0; z_0)$, тогда, поскольку $|MO|=\sqrt{59}$, то имеем (рис. 53):

$$x^2_0+y^2_0+z^2_0=59. \quad (1)$$

Уравнение этой сферы имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=121. \quad (2)$$

Если мы найдем координаты центра сферы, то останется только найти координаты точек A и A_1, откуда и получим ответ. Найдем для начала координаты точек B и B_1. Пусть B имеет координаты $(0; y; 0)$, тогда B_1 имеет по условию задачи координаты $(0; y-18; 0)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение сферы (2), получаем

$$\begin{cases} x_0^2+(y-y_0)^2+z_0^2=121, & (3)\\ x_0^2+(y-18-y_0)^2+z_0^2=121. & (4)\end{cases}$$

Из уравнения (1) имеем $x^2_0+z^2_0=59-y^2_0$, подставляя в (3)—(4), получаем

$$\begin{cases} (y-y_0)^2-y_0^2=62, & (5)\\ (y-18-y_0)^2-y_0^2=62. & (6)\end{cases}$$

Вычитая из уравнения (5) уравнение (6), получаем

$$(y-y_0)^2-(y-18-y_0)^2=0\Leftrightarrow(2y-18-2y_0)\cdot 18=$$
$$=0\Leftrightarrow y-y_0=9.$$

Подставляя в (5) это выражение, получим

$$9^2-y_0^2=62\Leftrightarrow y_0^2=19\Leftrightarrow y_0=\pm\sqrt{19}.$$

Эти два решения возникают из-за неоднозначности построения и соответствуют двум симметричным относительно плоскости Mxz сферам. Ограничимся поэтому одним случаем $y_0=\sqrt{19}$, тогда $y=9+\sqrt{19}$, и координаты точек B и B_1 равны соответственно $(0;\ 9+\sqrt{19};\ 0)$ и $(0;\ \sqrt{19}-9;\ 0)$. Пусть теперь точка C имеет координаты $(a;\ 0;\ 0)$. По условию задачи

$$\frac{|CM|}{|C_1M|}=\frac{8+\sqrt{2}}{8-\sqrt{2}},\ \text{т. е. } |C_1M|=\frac{8-\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a;$$

следовательно, координаты точки C_1 равны

$$\left(-\frac{8-\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a;\ 0;\ 0\right).$$

Поскольку точки C и C_1 лежат на сфере, то их координаты удовлетворяют уравнению сферы (2):

$$\begin{cases}(a-x_0)^2+y_0^2+z_0^2=121, & (7)\\ \left(-\dfrac{8-\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a-x_0\right)^2+y_0^2+z_0^2=121. & (8)\end{cases}$$

Из уравнения (1) имеем $y^2_0+z^2_0=59-x^2_0$. Подставляя это выражение в уравнения (7) и (8), получаем

$$\begin{cases}(a-x_0)^2-x_0^2=62, & (9)\\ \left(-\dfrac{8-\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a-x_0\right)^2-x_0^2=62. & (10)\end{cases}$$

Отсюда получаем

$$(a-x_0)^2=\left(-\frac{8-\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a-x_0\right)^2,\ \text{т. е. } x_0=\frac{\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a.$$

Подставляя это выражение в уравнение (9), получаем

$$\left(a-\frac{\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}a\right)^2=62,$$

т. е. $a^2\dfrac{8-\sqrt{2}}{8+\sqrt{2}}=62.$

Откуда $a^2=\frac{62\cdot(8+\sqrt{2})}{8-\sqrt{2}}=\frac{62(8+\sqrt{2})^2}{(8-\sqrt{2})(8+\sqrt{2})}=(8+\sqrt{2})^2$, и так как можно считать $a>0$, то $a=8+\sqrt{2}$, $x_0=\sqrt{2}$. Теперь из уравнения (1) найдем z_0: $2+19+z_0^2=59$, т. е. $z_0^2=38$, и поскольку можно считать, что $z_0>0$, так как в противном случае можно рассмотреть сферу, симметричную относительно плоскости Mxy, то $z_0=\sqrt{38}$.

Теперь осталось найти координаты точек A и A_1. Пусть A имеет координаты $(0;\ 0;\ b)$, где $b>0$, тогда поскольку A лежит на сфере, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2):

$$(\sqrt{2})^2+(\sqrt{19})^2+(b-\sqrt{38})^2=121,$$

откуда получаем $b-\sqrt{38}=\pm 10$, или $b=\sqrt{38}\pm 10$. Поскольку $b>0$, то $b=\sqrt{38}+10$. Очевидно, что для A_1 справедливо аналогичное уравнение, поэтому второй корень соответствует третьей координате A_1. Итак, координаты точек A и A_1 соответственно равны $(0;\ 0;\ \sqrt{38}+10)$ и $(0;\ 0;\ \sqrt{38}-10)$. Расстояние между A и A_1 равно $\sqrt{38}+10-(\sqrt{38}-10)=20$ (см).

Ответ 20 см.

§ 9. ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Вариант I

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой

$$y=-2(x-1)^2+8.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{x-1}3=2.$$

3. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R. Найти разность объемов описанного и вписанного конусов.

4. Решить уравнение

$$\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}.$$

5. Найти все пары чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие условиям $x<0$, $y>0$ и системе

$$\begin{cases}\left|y+\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{13}{6}+x-y\right|=\frac{13}{6}+x+\frac{1}{x},\\ x^2+y^2=\frac{97}{36}.\end{cases}$$

Вариант II

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой

$$y=-2(x-3)^2+2.$$

2. Решить уравнение

$$\log_{x+1}2=2.$$

3. В правильную треугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R. Найти разность объемов описанного и вписанного конусов.

4. Решить уравнение

$$\sin^8 x-\cos^8 x=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

5. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие условиям $x>0$, $y<0$ и системе

$$\begin{cases}\left|x+\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{10}{3}-x+y\right|=\frac{10}{3}+y+\frac{1}{y},\\ x^2+y^2=\frac{82}{9}.\end{cases}$$

Разбор задач варианта I

Задача 1. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Искомые точки есть корни уравнения

$$-2(x-1)^2+8=0,$$

откуда $x_1=-1$, $x_2=3$.

Площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой, равна

$$S=\int_{-1}^{3}[8-2(x-1)^2]\,dx=\left[8x-\frac{2}{3}(x-1)^3\right]\Big|_{-1}^{3}=$$

$$=24-\frac{2}{3}\cdot 8+8-\frac{2}{3}\cdot 8=32-\frac{32}{3}=21\frac{1}{3}.$$

Ответ: $21\frac{1}{3}$.

Задача 2. Из данного уравнения следует уравнение

$$(x-1)^2=3. \qquad (1)$$

Корни исходного уравнения содержатся среди корней уравнения (1). Но не все корни уравнения (1) обязательно будут

корнями исходного уравнения. Поэтому после нахождения корней уравнения (1) надо отобрать те из них, которые будут корнями данного уравнения. Корни уравнения (1) следующие: $x_1=1-\sqrt{3}$, $x_2=1+\sqrt{3}$.

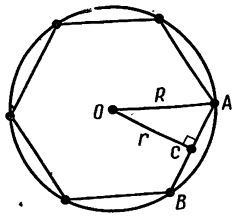


Рис. 54

Проверка показывает, что только $x=\sqrt{1+\sqrt{3}}$ будет корнем исходного уравнения.

Ответ: $\{1+\sqrt{3}\}$.

Задача 3. Найдем длину радиуса основания вписанного конуса (рис. 54). Обозначим ее через r.

Так как $\widehat{AOC}=\frac{\pi}{6}$, то из прямоугольного треугольника AOC находим $r=R\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Найдем разность объема описанного конуса V_1 и объема вписанного конуса V_2:

$$V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3R^2}{4}\cdot H=$$

$$=\frac{1}{12}\pi R^2H.$$

Ответ: $\frac{1}{12}\pi R^2H$.

Задача 4. Преобразуем левую часть уравнения

$$\cos^6x+\sin^6x=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^4x-\cos^2x\cdot\sin^2x+\sin^4x)=$$

$$=\cos^4x-\cos^2x\cdot(1-\cos^2x)+(1-\cos^2x)^2=3\cos^4x-3\cos^2x+1$$

и воспользуемся формулой $\cos2x=2\cos^2x-1$. Используя проведенные преобразования, получаем уравнение, равносильное исходному

$$3\cos^4x-3\cos^2x+1=\frac{15}{8}(2\cos^2x-1)-\frac{1}{2},$$

или

$$\cos^4x-\frac{9}{4}\cos^2x+\frac{9}{8}=0. \qquad (1)$$

Квадратное уравнение $t^2-\frac{9}{4}t+\frac{9}{8}=0$ имеет корни $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=\frac{3}{4}$. Значит, уравнение (1) равносильно совокупности двух уравнений

$$\cos^2x=\frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2x=\frac{3}{4}.$$

Первое уравнение не имеет решений, так как при любом x справедливо неравенство $|\cos x| \leqslant 1$, т. е. $\cos^2 x \leqslant 1$. Второе уравнение можно переписать в виде $\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{3}{4}$ или $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Решая последнее уравнение, находим

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z, \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z\right\}$.

Задача 5. Воспользуемся тем, что $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0, \end{cases}$ поэтому $\left|y + \frac{1}{x}\right| + \left|\frac{13}{6} + x - y\right| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{1}{x} \geqslant 0, \\ \frac{13}{6} + x - y \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, нужно найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y + \frac{1}{x} \geqslant 0 \\ \frac{13}{6} + x - y \geqslant 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36} \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y \geqslant -\frac{1}{x}, & (1) \\ y \leqslant \frac{13}{6} + x, & (2) \\ y^2 = \frac{97}{36} - x^2, & (3) \\ x < 0, & (4) \\ y > 0. & (5) \end{cases}$$

Пусть пара чисел $(x_0; y_0)$ удовлетворяет полученной системе. Тогда из (1) и (2) имеем неравенство $\frac{13}{6} + x_0 \geqslant -\frac{1}{x_0}$. С учетом того, что $x_0 < 0$, последнее неравенство равносильно неравенству

$$6x_0^2 + 13x_0 + 6 \leqslant 0. \qquad (6)$$

Для чисел x_0 и y_0 обе части неравенства (2) положительны, поэтому можно возвести в квадрат левую и правую части, получим $y_0^2 \leqslant \left(\frac{13}{6} + x_0\right)^2$. С учетом (3) имеем

$$\frac{97}{36} - x_0^2 \leqslant \left(\frac{13}{6} + x_0\right)^2$$

или

$$6x_0^2+13x_0+6\geqslant 0. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что x_0 удовлетворяет уравнению $6x_0^2+13x_0+6=0$, откуда $x_{01}=-\frac{2}{3}$, $x_{02}=-\frac{3}{2}$. Из (3) с учетом (5) получаем $y_{01}=\frac{3}{2}$, $y_{02}=\frac{2}{3}$. Из проведенных рассуждений следует, что условиям задачи могут удовлетворять только две пары чисел $\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что обе полученные пары удовлетворяют всем условиям задачи.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)\right\}$.

§ 10. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ПОЛИТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИИ)

Вариант I

1. Решить уравнение

$$\log_2\left(\frac{1}{|x-1|-1}\right)=1.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырьмя линиями:

$$y=-x^2+x+2;\ y=0;\ x=0;\ x=1.$$

3. На плоскости даны две окружности радиусов 12 см и 7 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по одну сторону от этой прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Вычислить длину отрезка M_1M_2.

4. Имеется два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

5. Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$5-4\sin^2 x-8\cos^2\frac{x}{2}=3k$$

имеет решения. Найти все эти решения.

Вариант II

1. Решить уравнение

$$\log_2(|x+1|-2)=-2.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырьмя линиями:

$$y=x^2-4x+5;\ y=0;\ x=0;\ x=2.$$

3. На плоскости даны две окружности радиусов 4 см и 3 см с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся некоторой прямой в точках M_1 и M_2 и лежащие по разные стороны от этой прямой. Отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка O_1O_2 равно $\sqrt{3}/2$. Вычислить длину отрезка O_1O_2.

4. Команда школьников, состоящая из мальчиков и девочек, участвовала в командных соревнованиях по шахматам. Мальчики этой команды сыграли в совокупности 60 партий, а девочки — 40. Из всех сыгранных мальчиками партий мальчики выиграли 45% партий, а из всех сыгранных девочками партий девочки проиграли 50% партий. Мальчики проиграли на 7 партий больше, чем девочки сыграли вничью. За победу в одной партии дается 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков, школьники одной и той же команды друг с другом не играют. Определить, сколько очков завоевано мальчиками этой команды, если вся команда набрала 52 очка.

5. Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение $2-2\cos 2x=3k+4\sin x$ имеет решение. Найти все эти решения.

Разбор задач варианта I

Задача 1. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{1}{|x-1|-1}=2, \text{ т. е. } |x-1|-1=\frac{1}{2}.$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$|x-1|=\frac{3}{2}.$$

Решая это уравнение, получаем, что

$$x-1=\frac{3}{2} \text{ или } x-1=-\frac{3}{2}, \text{ т. е. } x_1=\frac{5}{2},\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}\right\}$.

Задача 2. Искомая площадь ищется по формуле

$$S=\int_0^1(-x^2+x+2)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{6}.$$

Ответ: $2\frac{1}{6}$.

Задача 3. Чертеж к задаче представлен на рис. 55. Из условия задачи $|O_2M_2|=7$ см, $|O_1M_1|=12$ см, $\frac{|M_1M_2|}{|O_1O_2|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Так как точки M_1 и M_2 — точки касания окружностей с прямой, то $O_1M_1\perp M_2M_1$ и $O_2M_2\perp M_2M_1$. Из точки O_2 проведем прямую, параллельную M_2M_1, K — точка пересечения этой прямой с O_1M_1. Отметим, что $O_2K\perp O_1M_1$. Пусть $|M_2M_1|=x$ (см), тогда $|O_2K|=|M_2M_1|=x$ (см), а

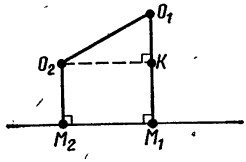


Рис. 55

$$|O_1O_2|=\frac{5|M_1M_2|}{2\sqrt{5}}=\frac{5x}{2\sqrt{5}}=\frac{x\sqrt{5}}{2}\text{ (см)}.$$

Вычислим длину отрезка O_1K:

$$|O_1K|=|O_1M_1|-|KM_1|=|O_1M_1|-|O_2M_2|=12-7=5\ \text{(см)}.$$

Из прямоугольного треугольника O_1O_2K по теореме Пифагора

$$|O_1O_2|^2=|O_2K|^2+|O_1K|^2,\ \text{т. е.}\ \frac{5x^2}{4}=x^2+5^2,$$

откуда $x=10$ (см).

Ответ: $|M_1M_2|=10$ см.

Задача 4. Обозначим процентное содержание цинка в первом и втором сплавах через x (по условию оно одинаково). В 150 кг первого сплава содержится $\frac{150\cdot x}{100}$ кг цинка, в 250 кг второго сплава содержится $\frac{250\cdot x}{100}$ кг цинка. Из того, что в новом сплаве оказалось 30% цинка, получаем уравнение $\frac{150\cdot x}{100}+\frac{250\cdot x}{100}=\frac{400\cdot 30}{100}$, откуда $x=30\%$. Поскольку во

втором сплаве содержится 26% меди и 30% цинка, то олова в нем содержится 44%. В 150 кг первого сплава содержится $\frac{150 \cdot 40}{100} = 60$ кг олова, а в 250 кг второго сплава содержится $\frac{250 \cdot 44}{100} = 110$ кг олова. Таким образом, в получившемся новом сплаве содержится 60 кг$+$110 кг$=$170 кг олова.

Ответ: 170 кг.

Задача 5. Воспользовавшись формулами

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \text{ и } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

получаем, что исходное уравнение равносильно следующему: $5-4(1-\cos^2 x)-4(1+\cos x)=3k$, т. е.

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 - 3k = 0. \qquad (1)$$

Так как дискриминант квадратного уравнения $4y^2-4y-3-3k=0$ равен $64+48k$, то при $k \leqslant -2$ он отрицателен и, следовательно, уравнение (1) решений не имеет при таких значениях k. Рассмотрим значения $k \geqslant -1$. Тогда

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{4+3k}}{2}, \quad y_2 = \frac{1-\sqrt{4+3k}}{2}.$$

При $k \geqslant 2$ $\quad y_1 \geqslant \frac{1+\sqrt{4+6}}{2} = \frac{1+\sqrt{10}}{2} > 1,$

$$y_2 \leqslant \frac{1-\sqrt{10}}{2} < -1,$$

а так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого действительного α, то уравнение (1) при $k \geqslant 2$ решений не имеет. Осталось рассмотреть $k=-1$, $k=0$, $k=1$.

Если $k=-1$, то $y_1 = \frac{1+\sqrt{4-3}}{2} = 1$, $y_2 = \frac{1-\sqrt{4-3}}{2} = 0$

и, значит, уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = 1; \ \cos x = 0,$$

откуда $x_1 = 2\pi n$, $n \in Z$; $\quad x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Если $k=0$, то $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ и уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x = \frac{3}{2}; \ \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $|\cos\alpha|\leqslant 1$ для любого действительного α. Решения второго уравнения есть

$$x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z.$$

Если $k=1$, то $y_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$, $y_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ и уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\cos x=\frac{1+\sqrt{7}}{2};\ \cos x=\frac{1-\sqrt{7}}{2}.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $\frac{1+\sqrt{7}}{2}>1$, а решениями второго уравнения являются

$$x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: При $k=-1$ решениями уравнения будут

$$\left\{2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi k;\ n,\ k\in Z\right\};$$

при $k=0$ решениями уравнения будут

$$\left\{\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in Z\right\};$$

при $k=1$ решениями уравнения будут

$$\left\{\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi n,\ n\in Z\right\};$$

при остальных значениях k уравнение решений не имеет.

§ 11. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ПЛАНИРОВАНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ)

Вариант I

1. Решить неравенство

$$\log_5(26-3^x)>2.$$

2. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

4. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ найти наибольшее значение функции

$$y = 5\cos x - \cos 5x.$$

5. На прямой дороге расположены последовательно пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B, C и D находятся в отношении 1:2:4. В направлении от A к D по дороге через равные промежутки времени с одной и той же скоростью едут автобусы. Из A в D вышли в разное время три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первого пешехода в пути между A и B обогнали 3 автобуса. Второго пешехода между A и C обогнали 4 автобуса. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов обогнали третьего пешехода в пути между A и D?

Вариант II

1. Решить неравенство

$$\log_3(13 - 4^x) > 2.$$

2. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найти площадь треугольника.

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0, \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0. \end{cases}$$

4. На отрезке $\left[0; \frac{5}{4}\pi\right]$ найти наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x + \sin 2x.$$

5. На прямой дороге последовательно расположены пункты A, B, C, D. Расстояния от пункта A до пунктов B, C, D находятся в отношении 1:4:7. Через равные промежутки времени по направлению от D к A по дороге едут автобусы с одной и той же скоростью. Из A в D в разное время вышли три пешехода и пошли по дороге с одной и той же скоростью. Первый пешеход в пути между A и B встретил два автобуса. Второй пешеход в пути между A и C встретил 4 автобуса. Третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы. Сколько автобусов встретил третий пешеход в пути между A и D?

Разбор задач варианта I

Задача 1. Неравенство равносильно следующему неравенству: $26-3^x>5^2$, т. е. $3^x<1$, откуда получаем, что $x<0$.

Ответ: $]-\infty; 0[$.

Задача 2. Пусть E, F, H — точки касания окружности со сторонами треугольника ABC (рис. 56). Известно, что $|AB|+|BC|+|AC|=36$ см и $\frac{|BH|}{|HC|}=\frac{2}{3}$. Положим $|BH|=2x$, тогда $|HC|=3x$ и по свойствам касательных к окружности, проведенных из одной точки, получаем $|BF|=2x$, $|CE|=3x$, $|AF|=|AE|$. Положим $|AF|=y$. Из того, что периметр треугольника равен 36 см, получаем уравнение $5x+3x+y+2x+y=36$, откуда $y=18-5x$.

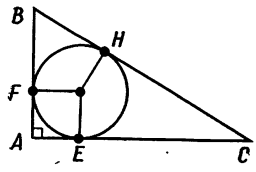


Рис. 56

Таким образом, $|BC|=|BH|+|HC|=2x+3x=5x$,

$|AB|=|AF|+|FB|=y+2x=18-5x+2x=18-3x$,

$|AC|=|AE|+|EC|=y+3x=18-5x+3x=18-2x$.

Из треугольника ABC по теореме Пифагора $(5x)^2=(18-2x)^2+(18-3x)^2$, откуда $x^2+15x-54=0$. Положительный корень этого уравнения равен 3, т. е. $x=3$, а следовательно, $|BC|=15$ (см), $|AB|=9$ (см), $|AC|=12$ (см).

Ответ: 9 см, 12 см, 15 см.

Задача 3. Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем $-2x^2+3x+2=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Осталось проанализировать два полученных значения.

После подстановки $x_1=2$ в оба уравнения системы получаем, что при этом значении x уравнения становятся тождествами, значит, пара чисел $(2; y)$ является решением системы при всех y. Подставляя $x_2=-\frac{1}{2}$ в оба уравнения системы находим $y=\frac{9}{4}$, т. е. решением системы будет $\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$, $(2; y)$, где y — любое действительное число.

Задача 4. Найдем критические точки данной функции, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Для этого решаем уравнение $y'(x)=0$, т. е. $5(\sin 5x-\sin x)=0$. Используя форму-

лу разности синусов, получаем $10 \sin 2x \cdot \cos 3x = 0$, откуда

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi k}{2}, \ k \in Z, \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \ n \in Z. \end{array}\right.$$

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ из полученных критических точек функции $y(x)$ принадлежат точки $-\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}$. Осталось посчитать значения функции в отобранных критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}, \ y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3},$$

$$y(0) = 4.$$

Так как $4 = \sqrt{16} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, то наибольшее значение равно $3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Задача 5. За единицу длины выберем расстояние между точками обгона пешехода следующими друг за другом автобусами. Положим $|AB| = S$ (в выбранных единицах длины), тогда $|AC| = 2S$, $|AD| = 4S$. Из условия, что третий пешеход вышел из A и прибыл в D, когда через эти пункты проезжали очередные автобусы, следует, что $4S$ — целое число. Так как первого пешехода в пути между A и B обогнали 3 автобуса, то получаем $2 < |AB| < 4$, т. е. $2 < S < 4$, откуда

$$8 < 4S < 16. \qquad (1)$$

Из того, что второго пешехода между A и C обогнали 4 автобуса, следует, что $3 < |AC| < 5$, т. е. $3 < 2S < 5$, откуда

$$6 < 4S < 10. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем неравенство $8 < 4S < 10$ и так как $4S$ — целое, то $4S = 9$. С другой стороны, $|AD| = 4S = k + 1$, где k — количество автобусов, которые обогнали третьего пешехода в пути между A и D. Отсюда находим $k = 8$.

Ответ: 8 автобусов.

§ 12. ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ ЛИНГВИСТИКИ)

Вариант I

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos^2 x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(x^2-1)\leqslant 1.$$

3. К параболе $y=4-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=1$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с осью Oy.

4. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD и с боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найти площадь трапеции, если угол DAB прямой, $|OC|=2$ см и $|OD|=4$ см.

5. При каких a из промежутка $[1;\infty[$ больший из корней уравнения

$$x^2-6x+2ax+a-13=0$$

принимает наибольшее значение?

Вариант II

1. Решить уравнение

$$\sin x=\cos 2x.$$

2. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\log_2(x^2-3)}.$$

3. К параболе $y=4x-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=3$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с осью Ox.

4. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана BM, причем $|AM|=|BM|$. Найти косинус угла KBM, если $|AB|=1$, $|BC|=2$.

5. При каких a из промежутка $]-\infty;-4]$ меньший из корней уравнения

$$x^2+ax-3x-2a-2=0$$

принимает наименьшее значение?

Разбор задач варианта I

Задача 1. Используя формулу синуса двойного угла, исходное уравнение перепишем в виде

$$2\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0,$$

т. е.

$$\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\cos x=0,\quad \sqrt{3}\sin x-\cos x=0.$$

Решениями первого уравнения будут $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$,

а второе уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, для которого $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{6} + \pi k;\ n,\ k \in Z\right\}$.

Задача 2. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \leqslant 3, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 4 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства системы будет объединение промежутков $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, а второго — отрезок $[-2; 2]$. Следовательно, решением полученной системы неравенств, а значит, и исходного неравенства будет $[-2; -1[\cup]1; 2]$.

Ответ: $[-2; -1[\cup]1; 2]$.

Задача 3. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = 4 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Так как $y' = -2x$, $y(1) = 3$, $y'(1) = -2$, то уравнение касательной записывается так: $y = 3 - 2(x - 1)$, т. е. $y = -2x + 5$. Эта касательная пересекает ось Oy в точке с ординатой $y = 5$ (в уравнение касательной положим $x = 0$).

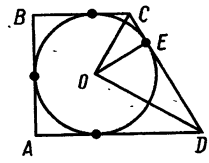


Рис. 57

Ответ: $(0; 5)$.

Задача 4. Пусть E — точка касания окружности с боковой стороной CD (рис. 57).

Заметим, что $\overset{\frown}{BCO} = \overset{\frown}{OCD}$, $\overset{\frown}{CDO} = \overset{\frown}{ODA}$ и $\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{CDA} = \pi$, отсюда $\overset{\frown}{OCD} + \overset{\frown}{CDO} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CDA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{CDA}}{2} = \frac{\pi}{2}$, а следовательно, $\overset{\frown}{COD} = \pi - \overset{\frown}{OCD} - \overset{\frown}{CDO} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, треугольник COD прямоугольный, поэтому

$$|CD| = \sqrt{|CO|^2 + |OD|^2} = \sqrt{20} \text{ см}.$$

Площадь треугольника COD равна $S_{\Delta COD} = \frac{|CO| \cdot |OD|}{2} = 4$ см^2.

С другой стороны, $S_{\Delta COD} = \frac{|OE| \cdot |CD|}{2}$, откуда

$$|OE| = \frac{2S_{\Delta COD}}{|CD|} = \frac{8}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ см}.$$

Радиус вписанной окружности $r=|OE|=\frac{4}{\sqrt{5}}$ см, а $|AB|=2r=\frac{8}{\sqrt{5}}$ см и $|AB|$ является длиной высоты трапеции. По свойству четырехугольника, описанного около окружности,

$$|BC|+|A\Gamma|=|AB|+|CD|=\left(\frac{8}{\sqrt{5}}+\sqrt{20}\right) \text{ см.}$$

Теперь ищем площадь трапеции

$$S_{ABCD}=\frac{|BC|+|AD|}{2}|AB|=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{\sqrt{5}}+\sqrt{20}\right)\frac{8}{\sqrt{5}}=14{,}4 \text{ см}^2.$$

Ответ: 14,4 см^2.

Задача 5. При $a=1$ данное уравнение принимает вид

$$x^2-4x-12=0$$

и больший из корней этого уравнения $x_0=6$. Пусть при каком-то $a>1$ больший из корней соответствующего уравнения $x_1\geqslant x_0$. Рассмотрим это значение a. Так как $x_1\geqslant 6$, то $2x_1+1>0$, и из равенства $x_1^2-6x_1+2ax_1+a-13=0$ будем иметь

$$a=\frac{-x_1^2+6x_1+13}{2x_1+1}.$$

Поскольку $a>1$, то $-x_1^2+6x_1+13>2x_1+1$, или $x_1^2-4x_1-12<0$, откуда получаем $-2<x_1<6$. Полученное неравенство противоречит предположению, что $x_1\geqslant 6$. Значит, при всех $a>1$ больший из корней соответствующего уравнения меньше 6, а следовательно, больший из корней принимает наибольшее значение при $a=1$.

Ответ: $a=1$.

§ 13. ФАКУЛЬТЕТ ПСИХОЛОГИИ

Вариант I

1. Решить уравнение

$$(\sqrt{3})^{\operatorname{tg} 2x}-\frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} 2x}}=0.$$

2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2u+v=7, \\ |u-v|=2. \end{cases}$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°, а радиус вписанной окружности

равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

4. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

5. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4+1+[1-2(2p-1)^4]\sin 2t\geqslant 0,$$

и найти все пары чисел $(p;\ t)$, для которых это неравенство превращается в равенство.

Вариант II

1. Решить уравнение

$$2^{\cos 2x}-\frac{1}{2\cdot 2^{\cos 2x}}=0.$$

2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3u-v=1, \\ |u-2v|=2. \end{cases}$$

3. В квадрат $ABCD$ со стороной длины a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найти величину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

4. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\sqrt{2x^2-4}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

5. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$4(p-3)^4+2+[2-4(p-3)^4]\cos t\geqslant 0,$$

и найти все пары чисел $(p;\ t)$, для которых это неравенство превращается в равенство.

Разбор задач варианта I

Задача 1. Умножив обе части данного уравнения на $3^{\operatorname{tg} 2x}\neq 0$, получим равносильное ему уравнение $3^{\frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x}=3^{\frac{3}{2}}$, откуда получаем $\frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x=\frac{3}{2}$, т. е. $\operatorname{tg} 2x=1$. Решая последнее уравнение, находим

$$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\ \text{или}\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Задача 2. Рассмотрим отдельно каждый из двух возможных случаев: $u\geqslant v$ и $u<v$.

1) Пусть $u\geqslant v$. Тогда данная система равносильна системе

$$\begin{cases}2u+v=7,\\ u-v=2,\end{cases}\quad\text{откуда находим}\quad\begin{cases}u=3,\\ v=1.\end{cases}$$

Полученные значения u и v удовлетворяют неравенству $u\geqslant v$.

2) Пусть $u<v$. Тогда исходная система равносильна системе

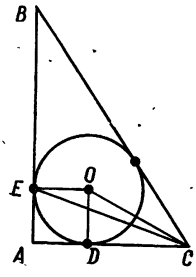


Рис. 58

$$\begin{cases}2u+v=7,\\ v-u=2,\end{cases}\quad\text{откуда находим}\quad\begin{cases}u=\frac{5}{3},\\ v=\frac{11}{3}.\end{cases}$$

Для полученных значений u и v условие $u<v$ выполнено.

Ответ: $\left\{(3;\,1),\ \left(\frac{5}{3};\,\frac{11}{3}\right)\right\}$.

Задача 3. Пусть вписанная окружность имеет центр в точке O и касается катета AB в точке E, а катета AC в точке D (рис. 58).

Тогда $[OE]\perp[AB]$, $[OD]\perp[AC]$ и $|EA|=|OD|=\sqrt{3}$. Вычислим величину угла DCO:

$$\widehat{DCO}=\widehat{OCB}=\frac{\widehat{DCB}}{2}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ.$$

Поэтому, рассматривая прямоугольный треугольник OCD, получим, что $|DC|=\frac{|OD|}{\operatorname{tg}\widehat{OCD}}=\frac{\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}}=3$. Следовательно, $|AC|=|DC|+|AD|=3+\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника ECA

$$|EC|=\sqrt{|EA|^2+|AC|^2}=\sqrt{3+(3+\sqrt{3})^2}=\sqrt{15+6\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.

Задача 4. Напишем уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$. Так как

$y'(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$, то уравнение касательной записывается так: $y=1-(x-1)$, т. е. $y=2-x$. Эта касательная пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x=2$ (в уравнении касательной положим $y=0$), а ось Oy в точке с ординатой $y=2$ (в уравнении касательной положим $x=0$). Таким образом, оба катета искомого треугольника имеют длину 2, откуда его площадь равна

$$S = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 5. Преобразуем левую часть неравенства, получим

$$2(2p-1)^4 \cdot (1-\sin 2t) + (1+\sin 2t).$$

Из того, что $|\sin 2t| \leqslant 1$ и $(2p-1)^4 \geqslant 0$, вытекает неотрицательность каждого слагаемого в полученном выражении. Следовательно, все выражение неотрицательно при любых p и t и обращается в нуль в том и только том случае, когда нулю равно каждое из двух слагаемых. Второе слагаемое обращается в нуль при $\sin 2t = -1$. При этих значениях t $\sin 2t \neq 1$, поэтому при этих t первое слагаемое может обратиться в нуль лишь за счет множителя $(2p-1)$. Отсюда получаем, что искомые пары чисел $(p; t)$ найдутся из системы

$$\begin{cases} 1 + \sin 2t = 0, \\ 2p - 1 = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем $\begin{cases} t = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z} \\ p = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТАМ II

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. $\{-3; 2\}$. **2.** $\{\pi(2k+1),\ k \in \mathbf{Z}\}$. **3.** $|ED| = 3\sqrt{3}$.

4. При $c = 8$ площадь треугольника будет наибольшей и она равна $\frac{1}{8}$. **5.** $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

1. $-\frac{7}{8}$. **2.** $\left\{\pi n,\ \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k \mid n,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$. **3.** $16\frac{2}{3}$.

4. $\left]-\infty; \frac{16-\sqrt{76}}{15}\right] \cup \left[\frac{16+\sqrt{76}}{15}; +\infty\right[$.

5. 6π (м). **6.** $\frac{3\sqrt{14}}{2}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. $\left\{\frac{\pi}{30}; \frac{11}{30}\pi; \frac{61}{30}\pi\right\}$. **2.** $\rho = \frac{\sqrt{13}}{2}$. **3.** $\{16; 512\}$.

4. $\frac{44}{3}$ кв. ед. **5.** $\frac{\frac{7}{4} - \sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin\alpha} \cdot \frac{-m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

6. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\beta}\right)$.

ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. $\{-1\}$. **2.** $\left\{\frac{\pi k}{5},\ (-1)^n \cdot \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \,\middle|\, k, n \in \mathbf{Z}\right\}$.

3. $B\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{9}\right)$. **4.** $\arcsin\sqrt{a}$. **5.** $k = \frac{1}{3}$.

БИОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}\right\}$. **2.** $\max\limits_{[-2,6]} y(x) = 8$, $\min\limits_{[-2,6]} y(x) = -73$.

3. $[-6; -4+\sqrt{2}[$. **4.** $\sqrt{91}$ м.

5. $\left\{\pm\arccos\frac{2}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$.

ФАКУЛЬТЕТ ПОЧВОВЕДЕНИЯ

1. $\{(6; 1), (1; 6)\}$. 2. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3. $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{24}$ см^2. 4. $]-1; 2[\cup]3; +\infty[$.

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ГЕОЛОГИИ)

1. $\left\{\pi k, -\frac{\pi}{4}+\pi n \mid k,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$. 2. $58\sqrt{3}$ см.

3. $x=y=\sqrt{2}$. 4. 18%. 5. $\frac{\pi}{4}$ кв. ед.

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЗИКИ)

1. $]2; +\infty[$. 2. Решений нет.

3. $\left\{\frac{-9-\sqrt{53}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. 4. 324,8 м. 5. $\sqrt{67}$ см.

ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

1. $\frac{2}{3}$. 2. $\{\sqrt{2}-1\}$. 3. $\frac{1}{4}\pi HR^2$.

4. $\left\{\frac{\pi}{4}(1+2k), \frac{\pi}{2}(1+2n) \mid k,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. $\left\{\left(\frac{1}{3}; -3\right), \left(3; -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ПОЛИТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИИ)

1. $\left\{-3\frac{1}{4}; 1\frac{1}{4}\right\}$. 2. $\frac{14}{3}$. 3. 14 см. 4. 36.

5. При $k=0$ решения $\left\{\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi k \mid n,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$,

при $k=1$ решения $\left\{(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$,

при $k=2$ решения $\left\{(-1)^{n+1}\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$.

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ (ОТДЕЛЕНИЕ ПЛАНИРОВАНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ)

1. $]-\infty; 1[$. 2. 60 см^2.

3. $(-1; 3)$, $(x; 2)$, где x — любое действительное число.

4. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **5.** 7 автобусов.

ФИЛОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
(ОТДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ ЛИНГВИСТИКИ)

1. $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid k,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$.

2. $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$. **3.** $(4,5; 0)$.

4. $\cos \widehat{KBM} = \frac{4}{5}$. **5.** $a = -4$.

ФАКУЛЬТЕТ ПСИХОЛОГИИ

1. $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$. **2.** $\left\{(0; -1), \left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)\right\}$.

3. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **4.** $S = 1$. **5.** $(3; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ

1) $p(x)\,g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0 \\ g(x) \text{ — определена,} \end{cases}$ или

$$\begin{cases} p(x) \text{ — определена,} \\ g(x) = 0; \end{cases}$$

2) $\frac{p(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases}$

3) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$

4) $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) \leqslant 0, \end{cases}$

5) $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = \pm g(x); \end{cases}$

6) $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$;

7) $\lg f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = 10^{g(x)}$;

8) $\lg f(x) = \lg g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2. СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ НЕРАВЕНСТВ

1) $p(x)\,g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \geqslant 0, \\ g(x) \leqslant 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} p(x) \leqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases}$

2) $\dfrac{p(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} p(x) \leqslant 0, \\ g(x) > 0; \end{cases}$

3) $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ 0 \leqslant f(x) < g^2(x); \end{cases}$

4) $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$

5) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x);$

6) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{array}\right.$

7) $\lg f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leqslant 10^{g(x)};$

8) $\lg f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) > 10^{g(x)};$

9) $f(x) \leqslant 10^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) - \text{определена}, \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geqslant \lg f(x); \end{cases}$

10) $\lg f(x) \geqslant \lg g(x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x) > 0.$

3. НЕКОТОРЫЕ АБСОЛЮТНЫЕ ТОЖДЕСТВА

1) $\lg|xy| = \lg|x| + \lg|y|;$

2) $\lg|x^\alpha| = \alpha \lg|x|;$

3) $\sqrt{x^2} = |x|;$

4) $\sqrt{|xy|} = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|};$

5) $\log_a(a^x) = x$ при $0 < a \neq 1.$

4. НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

1) $(\sqrt{f})^2 \xrightarrow{f \geqslant 0} f;$

2) $\sqrt{f}\,\sqrt{g} \xrightarrow{f \geqslant 0,\ g \geqslant 0} \sqrt{fg};$

3) $\log_a f + \log_a g \xrightarrow{f>0 \text{ или } g>0} \log_a(fg);$

4) $2n \log_a f \xrightarrow{f>0} \log_a(f^{2n});$

5) $a^{\log_a f} \xrightarrow{f>0} f$ при $0 < a \neq 1.$

5. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

а) *Формулы сложения*

1) абсолютные тождества

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x;$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x;$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y-\sin x\sin y};$$

2) условные тождества:

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\xrightarrow[\left\{\begin{array}{l}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\end{array}\right.}{}\operatorname{tg}(x+y);$$

$$\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\xrightarrow[\left\{\begin{array}{l}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ y\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\end{array}\right.}{}\operatorname{tg}(x-y).$$

б) *Функции двойного и половинного аргумента*

1) абсолютные тождества:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;$$
$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=1-2\sin^2x=2\cos^2x-1;$$
$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\quad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$
$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x};\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x};$$

2) условные тождества:

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\xrightarrow[x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi]{}\operatorname{tg}2x;\quad \frac{1-\cos x}{\sin x}\xrightarrow[x\neq 2k\pi]{}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

в) *Преобразование сумм и разностей в произведения (абсолютные тождества)*

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x + \cos y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y};$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

г) *Преобразование произведений в суммы (абсолютные тождества)*

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)].$$

д) *Формулы приведения:*

u	$\sin u$	$\cos u$	$\operatorname{tg} u$	$\operatorname{ctg} u$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

е) *Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного угла при* $x \neq \pi + 2\pi k$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

6. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

При решении тригонометрических уравнений надо стремиться свести данное уравнение к одному из простейших (или их совокупности):

$$\sin x = a, \ \cos x = a, \ \operatorname{tg} x = a, \ \operatorname{ctg} x = a.$$

Решение простейших уравнений приведено в таблицах, где всюду $n \in \mathbf{Z}$.

Вид уравнения	Значение a				
	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	$-1 < a < 1$	$\lvert a \rvert > 1$
$\sin x = a$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	решений нет
$\cos x = a$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	решений нет

Вид уравнения	Значение a			
	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	a — любое
$\operatorname{tg} x = a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$

Отметим особо часто встречающееся уравнение:

$$A\sin x + B\cos x = C \quad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

Для его решения обе части следует разделить на $\sqrt{A^2+B^2}$, получим:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad (1)$$

Поскольку точка $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ лежит на единичной окружности с центром в начале координат, то существует такой угол φ, что

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi,$$

но в таком случае

$$(1)\Leftrightarrow \cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\varphi)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

т. е. получаем простейшее тригонометрическое уравнение.

Решения простейших неравенств приводятся в следующей таблице (во всех нижеперечисленных неравенствах $n\in\mathbf{Z}$):

Неравенство	Решение
I. а) $\sin x\geqslant\frac{1}{3}$	$\left[\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right]$
б) $\sin x<-\frac{1}{3}$	$\left]-\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n;\ \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n\right[$
в) $\frac{1}{3}\leqslant\sin x<\frac{1}{2}$	$\left[\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right]$.
II. а) $\cos x>-\frac{1}{4}$	$\left]-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n;\ \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n\right[$
б) $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$	$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$
в) $\frac{1}{3}\leqslant\cos x<\frac{1}{2}$	$\left]\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right]\cup\left[-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right[$.

III. а) $\lg x > 1$	$\left]-\frac{P}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right[$
б) $\operatorname{tg} x \leqslant 2$ в) $\lvert\operatorname{tg} x\rvert < 4$	$\left]-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \operatorname{arctg} 2+\pi n\right]$ $]-\operatorname{arctg} 4+\pi n;\ \operatorname{arctg} 4+\pi n[$.
IV. а) $\operatorname{ctg} x \geqslant 3$	$]\pi n;\ \operatorname{arcctg} 3+\pi n]$
б) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$	$\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi+\pi n\right[$.

7. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

1) *Основные правила вычисления производных.* Если c — постоянная величина и функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют производные, то

$$c'=0;$$

$$(cu)'=cu';$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v';$$

$$(uv)'=u'v+v'u;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0);$$

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

2) *Основные формулы дифференцирования.* Если x независимая переменная, то

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\neq 1$ — постоянное число; $(x)'=1$;

$$(\sin x)'=\cos x;$$

$$(\cos x)'=-\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0);\ (e^x)'=e^x;$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\ (a>0,\ a\neq 1);\ (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

3) *Уравнение касательной к кривой.* Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, имеющей производную, в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$, то $f'(x)\geqslant 0$ при $a\leqslant x\leqslant b$ (соответственно $f'(x)\leqslant 0$ при $a\leqslant x\leqslant b$).

4) *Достаточный признак возрастания (убывания) функции.*

а) Если функция $f(x)$ имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке промежутка I, то $f(x)$ возрастает (убывает) на этом промежутке.

б) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и внутри него имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a; b]$.

5) *Необходимое условие экстремума.*

Точка x_0 называется точкой минимума (максимума) функции $f(x)$, если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности $f(x_0)\leqslant f(x)$ $(f(x_0)\geqslant f(x))$.

Точки минимума и максимума называются точками экстремумов данной функции, а значения функции в этих точках называются экстремумами функции.

Теорема Ферма. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю: $f'(x_0)=0$.

6) *Достаточные условия экстремума.*

а) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x)>0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x)>0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

б) Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x)<0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Таким образом, поведение функции $f(x)$ в точке x_0 характеризуется следующей таблицей:

	Знак произведений		Вывод
	$x<x_0$	$x<x_0$	
I	+	+	экстремума нет
II	+	−	максимум
III	−	+	минимум
IV	−	−	экстремума нет

7) *Наибольшее и наименьшее значения функции.* Наибольшее (наименьшее) значение на отрезке $[a; b]$ непрерыв-

ной функции $f(x)$ достигается или в критической точке этой функции (т. е. где производная $f'(x)$ или равна нулю, или не существует), или в граничных точках a и b данного отрезка.

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, достаточно вычислить значение функции во всех критических точках и на концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

8. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

1) *Основное свойство первообразных.* Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке I, тогда:

а) при любой постоянной C функция

$$F(x)+C$$

также является первообразной функции $f(x)$ на промежутке I;

б) любая первообразная функции f на промежутке I может быть записана в виде $F(x)+C$.

2) *Три правила нахождения первообразных.*

а) Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, а $G(x)$ первообразная функции $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ есть первообразная функции $f(x)+g(x)$.

б) Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ есть первообразная функции $kf(x)$.

в) Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, а a и b — постоянные, то $\frac{1}{a}F(ax+b)$ есть первообразная функции $f(ax+b)$.

3) *Площадь криволинейной трапеции.* Пусть $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция и S есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. Если $F(x)$ есть первообразная функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$S=F(b)-F(a).$$

4) *Формула Ньютона — Лейбница.* Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция и $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$, тогда интеграл от a до b функции $f(x)$ вычисляется по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ при $f(x)\geqslant 0$ геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапеции, ограниченную

кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox: $x=a$ и $x=b$.

5) *Таблица первообразных некоторых функций*:

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)+C$
$x^a\ (a\neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$

6) *Три правила вычисления интегралов.*

а) $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx\pm\int\limits_a^b g(x)\,dx$;

б) $\int\limits_a^b cf(x)\,dx=c\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где c — постоянная;

в) $\int\limits_a^b f(kx+p)\,dx=\frac{1}{k}\int\limits_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,dt$, где k и p — постоянные.

7) *Вычисление площадей и объемов.*

Если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные на отрезке $[a;\ b]$ функции ($f(x)\geqslant g(x)$ для любого $x\in[a;b]$), то площадь фигуры, заключенной между графиками этих функций и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,dx.$$